GRUNDLEHREN DER MATHEMATIK

FÜR STUDIERENDE UND LEHRER

I.

DIE GRUNDLEHREN DER ARITHMETIK UND ALGEBRA

BEARBEITET VON

E. NETTO UND † C. FÄRBER

II.

DIE GRUNDLEHREN DER GEOMETRIE

BEARBEITET VON

W. FR. MEYER UND H. THIEME

ERSTER TEIL. ZWEITER BAND

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1915

ALGEBRA

BEARBEITET VON

DR. EUGEN NETTO

O. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN

MIT 8 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1915

Zur Einführung.[1])

Die „Grundlehren der Mathematik" sind als eine dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechende Erneuerung und Weiterführung von R. Baltzers „Elementen der Mathematik" gedacht.

Die Fortschritte, die die mathematische Wissenschaft im letzten Jahrhundert zu verzeichnen hat, sind auch den Elementen der Mathematik in hervorragendem Maße zugute gekommen.

Den schärferen Methoden der neueren Wissenschaft gemäß ist auch den Lehren der Elementarmathematik eine schärfere Begründung gegeben worden. Zusammenhänge, die zwischen den Elementen und tiefer gehenden sowie weiterführenden Fragen der Wissenschaft bestehen, sind aufgedeckt und zur Klärung der in den Elementen zu behandelnden Begriffe und Methoden verwendet worden; überdies haben einzelne Gebiete der Elementarmathematik wertvolle Erweiterungen ihres Besitzstandes erfahren.

Für jemanden, der sich mit dem heutigen Stande der Elementarmathematik bekannt machen wollte, wäre es nicht leicht, sich die einschlägige, in vielen einzelnen Abhandlungen und Werken zerstreute Literatur zu verschaffen und auf Grund des Studiums dieser zahlreichen und meist schwierigen Schriften in einigermaßen ausreichender Weise zu einer tieferen Auffassung der Elemente zu gelangen.

Es fehlte bisher an einem Werke, in dem die auf die Elemente bezüglichen Ergebnisse der Wissenschaft in einiger Vollständigkeit zusammengefaßt wären.

Der Rahmen eines solchen Werkes würde indessen ein zu enger sein, wenn es sich lediglich auf die Elemente der Arithmetik, Algebra und Geometrie beschränken wollte; es erschien zweckmäßig, im Anschluß an die Elemente und auf ihnen fußend wenigstens die Grundzüge weiterer Entwickelungsreihen zu bearbeiten, die rückwärts wiederum ein neues Licht auf die Elemente zu werfen geeignet sind.

1) Abdruck aus dem ersten Bande des zweiten Teiles: H. Thieme, Die Elemente der Geometrie, 1909, bzw. aus dem ersten Bande des ersten Teiles: C. Färber, Arithmetik, 1911.

So haben sich denn die Unterzeichneten[1]) zu dem Versuche entschlossen, gemeinsam die bezeichnete Lücke in der Literatur ausfüllen zu helfen.

Die „Grundlehren“ sind auf vier Bände berechnet, von denen zwei der Geometrie, und je einer der Arithmetik und der Algebra gewidmet werden.

Der Band über Arithmetik und der erste Band über Geometrie sollen sich wesentlich auf eine Darstellung der Elemente beschränken, die dem heutigen Stande der Wissenschaft entspricht, während die beiden anderen Bände auch darüber hinaus in dem oben bezeichneten Sinne Ergänzungen und Erweiterungen bieten werden als eine Einführung in die Forschungen, die ein tieferes Verständnis der Lehren der Elementarmathematik ermöglichen.

Für Leser, die irgendeine der behandelten Fragen weiter verfolgen wollen, sind in allen Teilen des Werkes geeignete Literaturnachweise und historische Bemerkungen hinzugefügt worden.

Vorkenntnisse werden nur in möglichst geringem Umfange — in der Arithmetik und dem ersten Bande der Geometrie gar nicht — vorausgesetzt, wohl aber eine gewisse Fähigkeit und Neigung zum abstrakten Denken.

Der erste Band des ersten Teils „Arithmetik“[2]) stellt sich das Ziel, wissenschaftliche Strenge mit Verwendbarkeit für den Schulunterricht zu vereinigen.

Einzeln sind diese beiden Forderungen in mancher Darstellung der Arithmetik mehr oder minder vollkommen erfüllt. Der Verfasser erblickt seine Aufgabe darin, die in der Verbindung beider liegende Schwierigkeit zu überwinden.

Das Buch ist dazu bestimmt, dem Lehrer zur Vorbereitung auf den Unterricht zu dienen, ohne indes den Stoff unmittelbar in der für den Schüler der Mittelklassen geeigneten Form bringen zu wollen.

Wie der erste Band der Geometrie beschränkt sich auch dieser Band nicht auf die Lehren, die im Unterricht unbedingt gebraucht werden,

1) Nach einleitenden Vorverhandlungen der Verlagsbuchhandlung mit H. Thieme und W. Fr. Meyer lag es dem letzteren ob, für eine Erweiterung der Redaktion nach der arithmetisch-algebraischen Seite hin Sorge zu tragen. In der amtlichen Stellung der Unterzeichneten sollte auf Wunsch des Verlages bereits das Prinzip zum Ausdrucke kommen, sowohl dem Standpunkte der höheren Schulen wie dem akademischen Standpunkte Rechnung zu tragen.

W. Fr. Meyer hat auch, auf Grund eines Entwurfes von H. Thieme sowie weiterer Zusätze und Bemerkungen von E. Netto, C. Färber und ihm selbst, das vorliegende Einführungswort im Oktober 1908 anläßlich der Ausgabe des von H. Thieme bearbeiteten ersten Bandes: „Die Elemente der Geometrie“ zusammengestellt, für das er die Verantwortung übernimmt.

2) I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. 2 Bände. 1. Band: Arithmetik. Von C. Färber. XV, 410 S. 1911.

sondern geht vielfach weiter bzw. tiefer, als es im Unterrichte möglich ist.

In den Punkten, wo mehrere Anschauungsweisen möglich sind, hat sich der Verfasser unter Begründung seiner Meinung für eine bestimmte entschieden, in Anmerkungen jedoch auf andere Meinungen und deren Hauptvertreter hingewiesen.

Der rote Faden, der sich durch die Arithmetik zieht, ist die Entwickelung des Zahlbegriffs. Mit den natürlichen Zahlen beginnend hat der Verfasser die gebrochenen, negativen, irrationalen und komplexen Zahlen in einer Weise einzuführen gesucht, die einerseits einer strengeren Prüfung standhält, andererseits aber für den Schulunterricht auch wirklich zu verwerten ist.

Die „Arithmetik" wird in der Form, in der sie hier geboten wird, bei der zurzeit für Prima vorgeschriebenen wiederholenden Zusammenfassung vielleicht gute Dienste leisten können. —

Bei der Bearbeitung des vorliegenden Bandes über Algebra von E. Netto geht der Verfasser davon aus, daß die Grundlehren der Arithmetik sowohl den Boden für die algebraischen Forschungen liefern, als auch die Mittel für seine Bearbeitung.

Von den hier behandelten Hauptgegenständen der Algebra seien hervorgehoben: die Theorie der algebraischen Gleichungen einer Unbekannten, insbesondere das Fundamentaltheorem über die Existenz der Wurzeln, sodann die Unauflösbarkeit von Gleichungen höheren Grades. Aus praktischen Gründen ist auch die Lehre von den Determinanten in ihren Hauptzügen der Algebra angegliedert worden. Dagegen war die Theorie der algebraischen Zahlen, als dem Charakter des Gesamtwerkes nicht entsprechend, auszuschließen.

Des zweiten Teiles erster Band[1]) enthält die Elemente der Geometrie. Der Begriff der „Elemente" ist verhältnismäßig weit gefaßt. Es sind die einzelnen Lehren eingehender behandelt worden, als es in Schulbüchern üblich ist; es sind auch die einfachsten Lehren der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades sowie der darstellenden Geometrie aufgenommen; auch sind in gewissem Umfange die verschiedenen Methoden für die Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben nebst der neueren Geometrie des Dreiecks und des Tetraedes berücksichtigt.

Des zweiten Teiles zweiter, von W. Fr. Meyer herauszugebender Band der Geometrie wird die geometrischen Gebilde vom Standpunkte der Verwandtschaften aus behandeln unter besonderer Berücksichtigung der Begriffe von Gruppe und Invariante.

1) II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. 2 Bände. 1. Band: Die Grundlehren der Geometrie. Von H. Thieme. XII, 394 S. 1909.

Das ganze Werk ist, wie bereits aus Vorstehendem hervorgeht, nicht unmittelbar für den Unterricht bestimmt, will aber doch auch an seinem Teile zur Förderung des mathematischen Unterrichts beitragen.

Die Frage der zukünftigen Gestaltung des mathematischen Unterrichts ist im Flusse.

Ist diese Frage auch mehr eine solche der Unterrichtsmethodik als der Wissenschaft, so können doch die Ergebnisse der zu lehrenden Wissenschaft nicht als etwas Nebensächliches angesehen werden.

Diese Ergebnisse müssen vielmehr bei der Umgestaltung des Unterrichtes auch voll zur Geltung gelangen, wenn derselbe wirklich zur geistigen Förderung der Jugend dienen soll.

Dazu ist aber erforderlich, daß die Lehrer der Mathematik, die den Unterricht in der neuen Gestalt ins praktische Schulleben überführen sollen, nach jeder Richtung mit dem heutigen Stande der bezüglichen Gebiete der Wissenschaft vertraut sind.

W. Fr. Meyer. **E. Netto.**
H. Thieme. **† C. Färber.**

Vorwort.

Die Fundamente für den Aufbau der Algebra sind durch „die Grundlehren der Arithmetik“ gelegt; es handelt sich jetzt darum, auf diesem nun gewonnenen festen Boden den Plan für das Gebäude der Algebra zu entwerfen, ihn zu fördern und — wenn möglich — zur Vollendung zu führen. Aber freilich erscheint dem spähenden Auge dies Ziel als ein ideales und daher unerreichbares; ein Blick genügt, um zu zeigen, daß in den Grundlehren eine unendliche Fülle von Gebieten sich öffnet, deren jedes einzelne des Schweißes der Edlen wert ist. Die Hauptaufgabe, die in den Grundlehren der Algebra zu lösen ist, beruht auf einer richtigen Beschränkung des zu behandelnden Stoffes. Ein Beispiel für solche Verhältnisse liefern meine „Vorlesungen über Algebra“ verglichen mit der hier behandelten „Algebra“. Denn während in dieser nur alles Notwendige berücksichtigt wurde, liefern jene auch über das bloß Notwendige Hinausgehendes, sofern es nur interessant ist, oder neue Wege öffnet, oder bereits betretene Pfade ebnet.

Auch hier, wie in den „Grundlehren der Arithmetik“, ist durchgehend möglichste Vollständigkeit und gleichmäßige Berücksichtigung aller für den Schüler und daher für den Lehrer etwa in Frage kommenden Abschnitte der Algebra erstrebt, und zwar derart, daß zum erfolgreichen Studium des Werkes die Kenntnis der „Grundlehren der Arithmetik“ an allen Stellen ausreicht. Die Verwendung des Begriffes der Stetigkeit wurde soviel als möglich vermieden, d. h. überall mit Ausnahme des Wurzelexistenzbeweises an der Stelle, die P. Gordan treffend als den transzendenten Teil des Beweises bezeichnet. Die Anordnung des Stoffes ist nicht rein logisch gehalten und konnte das auch nicht, denn die Algebra erweist sich gegen ein solches Unterfangen in ihren einzelnen Zweigen zu verschlungen oder zu spröde. Die vorliegende Schrift soll eben nicht ein methodisches, sondern ein systematisches Buch sein. Diese Verhältnisse erklären und rechtfertigen es auch, daß das gleiche Theorem mannigfach an verschiedenen Stellen behandelt wird, wie dies beispielsweise bei der Zerlegung von ganzen Funktionen in lineare Faktoren eintritt.

Gießen.

E. Netto.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

V. Kapitel.

Lineare Gleichungen.

VI. Kapitel.

Resultanten und Diskriminanten.

VII. Kapitel.

Die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades.

Seite

VIII. Kapitel.

Wurzelexistenzbeweise.

IX. Kapitel.

Einwertige und zweiwertige Funktionen.

X. Kapitel.

Die Einheitswurzeln.

Seite

XI. Kapitel.

Die Kreisteilungsgleichungen.

XII. Kapitel.

Zyklische und reziproke Gleichungen.

XIII. Kapitel.

Substitutionengruppen. Funktionengattungen.

XIV. Kapitel.

Die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen.

XV. Kapitel.

Transformation. Invarianten und Kovarianten. Quadratische Formen.

XVI. Kapitel.

Der Sturmsche Satz.

Erstes Kapitel.

Determinanten.

§ 1. Ein überaus wichtiges Hilfsmittel für analytische und algebraische Untersuchungen liefern die Determinanten. Ihre Entstehung verdanken sie dem Studium der Systeme von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten[1]); und darauf beruht auch hauptsächlich ihre Stärke; denn überall, wo solche Systeme auftreten, finden die Determinanten Anwendung und die Resultate der Determinantentheorie Verwertung. Und das findet naturgemäß sehr häufig statt.

Ihrem Charakter nach gehört die Determinantentheorie zu den Anwendungen der Kombinatorik und hätte an dieser Stelle der Arithmetik behandelt werden können. Dabei wäre dann die Wichtigkeit der Begriffe „Permutation" und „Inversion" deutlich zutage getreten; aber freilich hätte die Bedeutung der Determinantenbildung noch nicht dargelegt werden können. Deshalb erschien es zweckmäßiger, sie hier, an der Schwelle ihrer Wirksamkeit unterzubringen. Es soll jedoch ihre Theorie nicht ins einzelne noch in alle Teile verfolgt, sondern nur soweit vorgetragen werden, als es die algebraischen Ziele unserer Untersuchungen nötig machen und rechtfertigen.

§ 2. Es mögen n^2 Größen $x_{\alpha\beta}$ gegeben sein ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, n$), die wir in n Zeilen und n Spalten einordnen

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \ldots & x_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \ldots & x_{nn} \end{array}\right. ,$$

so daß der erste Index α von $x_{\alpha\beta}$ die Ordnungszahl der Zeile von (1)

---

1) Die erste Idee geht auf Leibniz zurück (Brief an de l'Hospital, Hannover 1693), der sie aber nicht veröffentlichte. Cramer (Analyse des lignes courbes, Genève 1750) fand sie von neuem; Bézout (Théorie des équations algébriques, Paris 1779) und Vandermonde (Mémoire sur l'élimination, Paris 1772) erweiterten die Theorie. Durch Cauchy (Mém. sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs, Paris 1815) und Jacobi (De formatione et proprietatibus determinantium, Berlin 1841) ward sie Allgemeingut der Mathematiker.

und der zweite β die der Spalte anzeigt. Die $x_{\alpha\beta}$ heißen die Elemente von (1). Wir bilden nun die $n!$ Produkte

$$x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} x_{3\alpha_3} \dots x_{n\alpha_n}, \tag{2}$$

in denen die Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ sämtliche $n!$ Permutationen der Ziffern $1, 2, 3, \dots, n$ durchlaufen. Bei der Bildung von (2) tritt also ein Element jeder Zeile und eins jeder Spalte von (1) auf. Ferner verstehen wir unter dem Symbole (Grundlehren I. Teil, I. Band, Arithmetik, S. 177 ff.)

$$[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n]$$

die Anzahl der Inversionen der Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ und setzen

$$D = \sum (-1)^{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]} x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} \dots x_{n\alpha_n}, \tag{3}$$

wobei die Summe sich über alle $n!$ Permutationen der $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ erstrecken soll.

Die Summe (3) der $n!$ Glieder heißt die n-reihige Determinante der n^2 Elemente (1).

Wir bilden einige Beispiele:

Für $n = 2$ wird

$$D = (-1)^{[1,2]} x_{11} x_{22} + (-1)^{[2,1]} x_{12} x_{21} = x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21}.$$

Für $n = 3$ findet man die explizite Darstellung in sechs Summanden

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{[1,2,3]} x_{11} x_{22} x_{33} + (-1)^{[1,3,2]} x_{11} x_{23} x_{32} + (-1)^{[2,1,3]} x_{12} x_{21} x_{13} \\ &+ (-1)^{[2,3,1]} x_{12} x_{23} x_{31} + (-1)^{[3,1,2]} x_{13} x_{21} x_{32} + (-1)^{[3,2,1]} x_{13} x_{21} x_{31} \\ &= x_{11} x_{22} x_{33} - x_{11} x_{23} x_{32} - x_{12} x_{21} x_{33} + x_{12} x_{23} x_{31} + x_{13} x_{21} x_{32} - x_{13} x_{22} x_{31}. \end{aligned}$$

Für $n = 4$ ergibt sich die Summe von 24 Summanden

$$\begin{aligned} D &= x_{11} x_{22} x_{33} x_{44} - x_{11} x_{22} x_{34} x_{43} - x_{11} x_{23} x_{32} x_{44} + x_{11} x_{23} x_{34} x_{42} \\ &+ x_{11} x_{24} x_{32} x_{43} - x_{11} x_{24} x_{33} x_{42} - x_{12} x_{21} x_{33} x_{44} + x_{12} x_{21} x_{34} x_{43} \\ &+ x_{12} x_{23} x_{31} x_{44} - x_{12} x_{23} x_{34} x_{41} - x_{12} x_{24} x_{31} x_{43} + x_{12} x_{24} x_{33} x_{41} \\ &+ x_{13} x_{21} x_{32} x_{44} - x_{13} x_{21} x_{34} x_{42} - x_{13} x_{22} x_{31} x_{44} + x_{13} x_{22} x_{34} x_{41} \\ &+ x_{13} x_{24} x_{31} x_{42} - x_{13} x_{24} x_{32} x_{41} - x_{14} x_{21} x_{32} x_{43} + x_{14} x_{21} x_{33} x_{42} \\ &+ x_{14} x_{22} x_{31} x_{43} - x_{14} x_{22} x_{33} x_{41} - x_{14} x_{23} x_{31} x_{42} + x_{14} x_{23} x_{32} x_{41}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, wächst die Anzahl der Summanden mit steigender Reihenzahl sehr schnell (vgl. Grundlehren I, I, S. 179).

§ 3. In dem Produkte

$$x_{\beta_1\alpha_1} x_{\beta_2\alpha_2} x_{\beta_3\alpha_3} \dots x_{\beta_n\alpha_n} \tag{4}$$

mögen die $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ und die $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ je eine Permutation

der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ bedeuten. Dann ist das Produkt (4) bei richtig gewähltem Vorzeichen ein Glied der Determinante (3), wie man durch Umordnung der Elemente $x_{\beta\alpha}$ erkennt. Diese Umordnung führt zugleich zur Vorzeichenbestimmung von (4). Bilden nämlich die β die Zahlenreihe in natürlicher Ordnung, so ist das Vorzeichen durch den Wert von

$$(-1)^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n]}$$

bestimmt. Es fragt sich, ob man auch ohne vorherige Umordnung der Faktoren von (4) in ihre natürliche Ordnung das Vorzeichen von (4) direkt bestimmen kann. Wir wollen zeigen, daß es durch den Wert von

$$(5) \qquad (-1)^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n] + [\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n]}$$

gegeben wird. In der Tat: nimmt man in (4) unter den Faktoren eine Transposition, also eine Umstellung zweier Elemente $x_{\beta_1 \alpha_1}$ und $x_{\beta_2 \alpha_2}$ vor, so ändert sich jedes der Inversionssymbole (Grundlehren I, I, S. 180)

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n], \quad [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$$

um eine ungerade, ihre Summe also um eine gerade Zahl; demnach bleibt die in (5) niedergeschriebene Potenz von (-1) ungeändert in ihrem Werte.

Nun kann jede Permutation durch eine Folge von Transpositionen hergestellt werden. Folglich bleibt bei jeder Permutation der Faktoren von (4) die Summe (5) ungeändert, insbesondere auch bei der Permutation, bei der die ersten oder auch die, bei der die zweiten Indizes in ihre natürliche Reihenfolge gebracht werden.

§ 4. Nach der Definition der Determinanten durch (3) wollen wir ihre wichtigsten elementaren Eigenschaften angeben und herleiten.

I. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man ihre Zeilen in gleicher Folge zu ihren Spalten macht oder umgekehrt. In der Tat geht durch diese Umstellung jedes Produkt aus (3)

$$x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} x_{3\alpha_3} \ldots x_{n\alpha_n} \quad \text{in} \quad x_{\alpha_1 1} x_{\alpha_2 2} x_{\alpha_3 3} \ldots x_{\alpha_n n}$$

über. Das zweite Produkt kommt, abgesehen vom Vorzeichen, auch in (3) vor; die Vorzeichen beider Produkte sind nach (3) und nach dem vorigen Paragraphen durch

$$(-1)^{[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]} \quad \text{bzw.} \quad (-1)^{[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] + [1, 2, \ldots, n]}$$

gegeben, und da beide miteinander übereinstimmen, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, so ist die Behauptung gerechtfertigt.

Aus I folgt, daß alle für Zeilen von (3) bewiesenen Eigenschaften ohne weiteres für Spalten gelten und umgekehrt; und aus diesem

Grunde fassen wir Zeilen und Spalten unter dem allgemeinen Begriffe von Reihen zusammen.

Ändert sich bei der unter I angegebenen Vertauschung von Spalten und Zeilen die Determinante auch ihrer Form nach nicht, d. h. ist

$$x_{\varkappa\lambda} = x_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

dann heißt die Determinante symmetrisch.

Ist dagegen bei einer Determinante (3)

$$x_{\varkappa\lambda} = -x_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

also insbesondere

$$x_{11} = x_{22} = x_{33} = \cdots = x_{nn} = 0,$$

dann heißt die Determinante schiefsymmetrisch.

II. Durch die Vertauschung zweier parallelen Zeilen oder zweier parallelen Spalten einer Determinante ändert sich nur das Vorzeichen, nicht der absolute Wert der Determinante. In der Tat geht durch die Transposition der $\varkappa^{\text{ten}}$ und λ^{ten} Spalte jedes Produkt aus (1), etwa

$$x_{1\alpha_1} \ldots x_{\varkappa\alpha_\varkappa} \ldots x_{\lambda\alpha_\lambda} \ldots x_{n\alpha_n} \quad \text{in} \quad x_{1\alpha_1} \ldots x_{\varkappa\alpha_\lambda} \ldots x_{\lambda\alpha_\varkappa} \ldots x_{n\alpha_n}$$

über. Das zweite Produkt kommt, abgesehen vom Vorzeichen, auch in (3) vor; die Vorzeichen beider Produkte sind nach (3) durch die beiden Potenzen

$$(-1)^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots, \alpha_\lambda, \ldots, \alpha_n]} \quad \text{bzw.} \quad (-1)^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots, \alpha_n]}$$

bestimmt. Da die beiden Exponenten sich nur durch eine Transposition unterscheiden, so sind die beiden Vorzeichen verschieden; damit ist die Behauptung bewiesen.

III. Wenn die entsprechenden Elemente zweier Parallelreihen einer Determinante einander gleich sind, hat die Determinante den Wert Null. Denn hat sie den Wert D, so geht dieser nach II bei der Vertauschung der beiden einander gleichen Parallelreihen in $(-D)$ über; die Vertauschung ändert aber nichts an der Determinante, da die vertauschten Reihen einander gleich sind. Also ist $-D = D$, d. h. es wird $D = 0$, wie behauptet war.

Aus der Bildungsart der Determinanten geht hervor, daß sie homogene lineare Funktionen der Elemente jeder Reihe sind.[1])

Aus der Definition (3) folgt sofort

IV. Multipliziert man sämtliche Elemente einer Reihe der Determinante mit einer willkürlichen Größe, dann multipliziert sich der Wert der Determinante mit dieser Größe.

---

1) Über den Begriff einer „homogenen linearen Funktion“ siehe später zweites Kapitel, § 19.

Die Bezeichnung der Determinante (3) kann auf mannigfache Art vor sich gehen. Am ausführlichsten und deutlichsten geschieht dies dadurch, daß man das System (1) in Vertikalstriche einschließt

$$(6) \qquad D = \begin{matrix} x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & \ldots, & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & \ldots, & x_{2n} \\ x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & \ldots, & x_{3n} \\ & & & & \\ x_{n1}, & x_{n2}, & x_{n3}, & & x_{nn} \end{matrix}$$

Treten gesetzlos Größen als Elemente $x_{\alpha\beta}$ auf, dann wird eine solche oder eine ähnliche ausführliche Darstellung nicht zu vermeiden sein.

Ist das Bildungsgesetz der $x_{\alpha\beta}$ bekannt, so reicht es aus,

$$(7) \qquad D = x_{\alpha\beta} | \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

zu schreiben. In ähnlicher Schreibweise bedeutet z. B. das Symbol

$$x_{\alpha\beta} | \qquad (\alpha = 1, 2;\ \beta = 3, 4)$$

die zweireihige Determinante, die ausführlicher geschrieben lautet

$$a_{13}, \ a_{14} \ | = a_{13}\, a_{24} - a_{14}\, a_{23}.$$

Häufig reicht es aus, eine Zeile oder eine Spalte anzugeben, etwa bei der Darstellung durch Zeilen

$$(8) \qquad D = | x_{h1}, x_{h2}, x_{h3}, \ldots, x \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

so dedeutet die vierreihige Determinante

$$| 1, x_1^h, x_2^h, x_3^h | \qquad (h = 1, 2, 3, 4)$$

soviel, wie die ausführlich geschriebene

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_2, & x_3 \\ 1, & x_1^2, & x_2^2, & x_3^2 \\ 1, & x_1^3, & x_2^3, & x_3^3 \\ 1, & x_1^4, & x_2^4, & x_3^4 \end{vmatrix}.$$

Das Produkt der Glieder der von links oben nach rechts unten gehenden Diagonale in (1), die das sogenannte Hauptglied der Determinante bilden, dient gleichfalls zu ihrer Bezeichnung, indem man schreibt

$$(9) \qquad D = \sum \pm\, x_{11} x_{22} x_{33} \ldots x_{nn}.$$

§ 5. Aus der Eigenschaft II, § 4 läßt sich eine Umformung der Determinante D herleiten. Vertauscht man die i^{te} Zeile in D mit der $(i-1)^{\text{ten}}$, dann in der neuen transformierten Determinante die $(i-1)^{\text{te}}$ mit der $(i-2)^{\text{ten}}$ usf., bis die ursprünglich i^{te} an die erste

Stelle gelangt ist, was durch $(i-1)$ solcher Vertauschungen bewirkt wird, so erhält man die Gleichung

$$|x_{\alpha\beta}| = (-1)^{i-1} \,|\, x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hn} \,|$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n); \quad (h = i, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n).$$

Wendet man den entsprechenden Satz für Spalten jetzt auf die rechts stehende Determinante der letzten Gleichung an, so ergibt sich die weitere Umformung

(10) $$|x_{\alpha\beta}| = (-1)^{i+k} \,|\, x_{\sigma\tau} \,|$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$
$$(\sigma = i, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;\ \tau = k, 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n).$$

Allgemeiner: Aus II folgt, daß durch beliebige Umstellung der Zeilen und der Spalten von D je untereinander der Wert der Determinante sich bis auf einen Faktor ± 1 reproduziert. Bedeuten also

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n \qquad k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$$

zwei beliebige Permutationen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, dann ist zunächst

$$D = \pm \begin{vmatrix} x_{i_1 k_1} & \ldots & x_{i_1 k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{i_n k_1} & \ldots & x_{i_n k_n} \end{vmatrix} = \pm \,|\, x_{i_h k_1}\, x_{i_h k_2} \ldots x_{i_h k_n} \,| \quad (h = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Um noch das Vorzeichen zu bestimmen, vergleichen wir das Hauptglied der rechts stehenden Determinante, nämlich

$$+\, x_{i_1 k_1}\, x_{i_2 k_2} \ldots x_{i_n k_n}$$

mit dem ihm litteral gleichen der linken Seite, dessen Zeichen durch (5) bestimmt wird,

$$(-1)^{[i_1 i_2 \ldots i_n] + [k_1 k_2 \ldots k_n]}\, x_{i_1 k_1}\, x_{i_2 k_2} \ldots x_{i_n k_n},$$

und entnehmen daraus die Gleichung

(10a) $$|\, x_{i_h k_1}\, x_{i_h k_2} \ldots x_{i_h k_n} \,| = (-1)^{[i_1 \ldots i_n] + [k_1 \ldots k_n]}\, D.$$

§ 6. Aus (3) folgt, daß das Aggregat aller der Glieder der Determinate D, die das Element x_{11} als einen Faktor enthalten, gleich

$$x_{11} \sum_{(\alpha)} (-1)^{[1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots]}\, x_{2\alpha_2}\, x_{3\alpha_3} \ldots x_{n\alpha_n},$$

also

$$= x_{11} \sum_{(\alpha)} (-1)^{[\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]}\, x_{2\alpha_2}\, x_{3\alpha_3} \ldots x_{n\alpha_n}$$

ist, wobei $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ alle $(n-1)!$ Permutationen der Zahlen $2, 3, \ldots, n$

durchläuft. Daher ist die Summe rechts gleich der $(n-1)$-reihigen Determinante

$$|x_{\alpha\beta}| \quad \begin{matrix} x_{22} & x_{23} & \cdot & x_{2n} \\ x_{32} & x_{33} & \cdot & x_{3n} \\ & & & \\ x_{n2} & x_{n3} & \cdot & \cdot \end{matrix} \quad D_{11} \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, \ldots, n),$$

so daß die Determinante (3) alle $(n-1)$ Glieder von $x_{11} D_{11}$ umfaßt.

Das Aggregat derjenigen Glieder von (3), die den Faktor x_{ik} haben, wird durch die Formel (10) in Verbindung mit dem eben erhaltenen Resultate geliefert. Man erhält für dieses Aggregat den Ausdruck

$$(-1)^{i+k} x_{ik} |x_{\alpha,\beta}|$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n);$$

diesen bezeichnen wir mit

$$x_{ik} \cdot D_{ik}, \quad \text{so daß} \quad D_{ik} = (-1)^{i+k} |x_{\alpha\beta}|$$
$$(\alpha = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;\ \beta = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n).$$

D_{ik} ist die $(n-1)$-reihige Determinante, die aus D durch Tilgung der i^{ten} Zeile und der k^{ten} Spalte entsteht, multipliziert mit $(-1)^{i+k}$; D_{ik} heiße die Adjunkte von x_{ik} in D.

Aus diesen Betrachtungen folgt für den Wert der Determinante der Ausdruck

$$D = x_{11} D_{11} + x_{12} D_{12} + x_{13} D_{13} + \cdots + x_{1n} D_{1n}$$

und auch, wie aus der Vertauschung von Zeilen und Spalten folgt,

$$D = x_{11} D_{11} + x_{21} D_{21} + x_{31} D_{31} + \cdots + x_{n1} D_{n1}.$$

Denn jeder der $n!$ Summanden von D enthält einen und auch nur einen Faktor, der der ersten Zeile (Spalte) angehört, und die zu jedem $x_{1\alpha}$ (bzw. zu $x_{\alpha 1}$) gehörigen Summanden sind in $D_{1\alpha}$ ($D_{\alpha 1}$) zusammengefaßt. Das Entsprechende gilt von jeder andern Zeile (Spalte); also ist

$$(11) \qquad \begin{aligned} D &= x_{i1} D_{i1} + x_{i2} D_{i2} + \cdots + x_{in} D_{in}; \\ D &= x_{1k} D_{1k} + x_{2k} D_{2k} + \cdots + x_{nk} D_{nk}. \end{aligned}$$

In der ersten dieser beiden Formeln treten die Elemente der i^{ten} Zeile auf der rechten Seite explizit nur in den ersten Faktoren der Summanden auf, während $D_{i1}, D_{i2}, \ldots, D_{in}$ frei von ihnen sind. Ersetzt man sie durch die entsprechenden Elemente einer Parallelzeile, so wird die linke Seite wegen III zu Null; und das Entsprechende gilt

auch von den Spalten. Folglich ergibt sich als Ergänzung zu (11) die Reihe der $2(n-1)$ Gleichungen

$$(12) \qquad \begin{cases} 0 = x_{k1}D_{i1} + x_{k2}D_{i2} + \cdots + x_{kn}D_{in}, \\ 0 = x_{1k}D_{1i} + x_{2k}D_{2i} + \cdots + x_{nk}D_{ni} \end{cases} \qquad (i \neq k).$$

Als Beispiel behandeln wir die dreireihige Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -157.$$

Hierbei wird für die Adjunkten gefunden

$$D_{11} = + \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -25, \qquad D_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 14,$$

$$D_{13} = + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -24;$$

$$D_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 11, \qquad D_{22} = + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -25,$$

$$D_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$D_{31} = + \qquad = -15, \qquad D_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & \end{vmatrix} = -23,$$

$$D_{33} = + \begin{vmatrix} 3 & \\ -2 & \end{vmatrix} = 17;$$

und die $2n^2$ Gleichungen (11), (12) werden jetzt (bei $n = 3$) zu

$$3\cdot(-25)+1\cdot 14+4\cdot(-24)=-157, \quad -2\cdot(-25)+5\cdot 14+5\cdot(-24)=0,$$
$$3\cdot 11+1\cdot(-25)+4\cdot(-2)=0, \quad -2\cdot 11+5\cdot(-25)+5\cdot(-2)=-157,$$
$$3\cdot(-15)+1\cdot(-23)+4\cdot 17=0, \quad -2\cdot(-15)+5\cdot(-23)+5\cdot 17=0,$$
$$4\cdot(-25)+2\cdot 14-3\cdot(-24)=0,$$
$$4\cdot 11+2\cdot(-25)-3\cdot(-2)=0,$$
$$4\cdot(-15)+2\cdot(-23)-3\cdot 17=-157;$$

$$3\cdot(-25)-2\cdot 11+4(-15)=-157, \quad 1\cdot(-25)+5\cdot 11+2\cdot(-15)=0,$$
$$3\cdot 14-2\cdot(-25)+4\cdot(-23)=0, \quad 1\cdot 14+5\cdot(-25)+2\cdot(-23)=-157,$$
$$3\cdot(-24)-2\cdot(-2)+4\cdot 17=0, \quad 1\cdot(-24)+5\cdot(-2)+2\cdot 17=0,$$
$$4\cdot(-25)+5\cdot 11-3\cdot(-15=)\,0,$$
$$4\cdot 14 \quad +5\cdot(-25)-3\cdot(-23)=0,$$
$$4\cdot(-24)+5\cdot(-2)-3\cdot 17=-157.$$

Wie man an diesem Beispiele sieht, kann die Formel (11) vorteilhaft zur Berechnung von Determinanten benutzt werden. Die n-reihige Determinante wird dadurch zuerst auf $(n-1)$-reihige reduziert; diese durch die entsprechende Formel auf $(n-2)$-reihige, usf. bis man zu zweireihigen Determinanten kommt, deren Werte ja einfach anzugeben sind. Freilich kann diese Methode der Berechnung häufig durch bequemere ersetzt werden.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Adjunkten D_{ik} und D_{ki} der Elemente x_{ik} und x_{ki} in der symmetrischen Determinante

$$D = |x_{\alpha\beta}| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, n); \; (x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha}).$$

Der einfacheren Schreibweise wegen nehmen wir $n = 4$; $i = 2$; $k = 3$. Dann wird

$$D_{2,3} = - \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{14} \\ x_{31} & x_{32} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} \qquad D_{3,2} = - \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{23} & x_{24} \\ x_{41} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix}$$

Vertauscht man in $D_{3,2}$ die Zeilen mit den Spalten, so folgt

$$D_{3,2} = - \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{41} \\ x_{13} & x_{23} & x_{43} \\ x_{14} & x_{24} & x_{44} \end{vmatrix},$$

und daraus wegen $x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha}$

$$D_{3,2} = D_{2,3}.$$

Allgemein gilt für jede symmetrische Determinante

$$D_{ik} = D_{ki}.$$

Der Beweis für diesen Satz verläuft ganz analog dem für den speziellen Fall soeben gelieferten.

§ 7. Durch die Formeln (11) wird leicht folgende weitere elementare Eigenschaft der Determinanten bewiesen:

V. Sind alle Elemente einer Reihe der Determinante D, etwa die der i^{ten} Zeile, Summen aus zwei Summanden

$$x_{i1} = \xi_{i1} + \eta_{i1}, \quad x_{i2} = \xi_{i2} + \eta_{i2}, \ldots, x_{in} = \xi_{in} + \eta_{in},$$

dann ist

$$D = D_1 + D_2,$$

wo D_1 bzw. D_2 dadurch aus D entsteht, daß die Elemente der i^{ten} Zeile durch $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}$ bzw. durch $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{in}$ ersetzt werden. In der Tat liefert (11) sofort durch die Gleichung

$$(\xi_{i1} + \eta_{i1})D_{i1} + (\xi_{i2} + \eta_{i2})D_{i2} + \cdots + (\xi_{in} + \eta_{in})D_{in} = D_1 + D_2$$

den Beweis des Satzes V.

Das Theorem V kann ohne Schwierigkeit auf mehr als zwei Reihen und auf Summen von mehr als zwei Summanden ausgedehnt werden.

Beispielsweise behandeln wir

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix} = D.$$

Nach V zerfällt D in acht Summanden

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\beta_1 & a_1\gamma_1 \\ b_1\alpha_1 & b_1\beta_1 & b_1\gamma_1 \\ c_1\alpha_1 & c_1\beta_1 & c_1\gamma_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\beta_1 & a_2\gamma_2 \\ b_1\alpha_1 & b_1\beta_1 & b_2\gamma_2 \\ c_1\alpha_1 & c_1\beta_1 & c_2\gamma_2 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_2\alpha_2 & a_2\beta_2 & a_2\gamma_2 \\ b_2\alpha_2 & b_2\beta_2 & b_2\gamma_2 \\ c_2\alpha_2 & c_2\beta_2 & c_2\gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_1 & b_1 \\ c_1 & c_1 & c_1 \end{vmatrix} + \alpha_1\beta_1\gamma_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \cdots + \alpha_2\beta_2\gamma_2 \begin{vmatrix} a_2 & a_2 & a_2 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ c_2 & c_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

nach III verschwinden diese sämtlich. Es folgt daher für unsere Determinante der Wert

$$D = 0$$

als Schlußresultat.

§ 8. Aus dem Satze V kann man weiter den folgenden herleiten:

VI. Der Wert einer Determinante D bleibt ungeändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die gleichen Vielfachen der entsprechenden Elemente einer Parallelreihe addiert. Ersetzt man z. B. in D die Elemente der i^{ten} Zeile

$$x_{i1},\ x_{i2},\ x_{i3},$$

durch

$$x_{i1} + q x_{k1},\ x_{i2} + q x_{k2},\ x_{i3} + q x_{k3},\ \ldots,\ x_{in} + q x_{kn}$$

bei $i \neq k$, dann ist nach dem vorigen Theorem die neu entstehende Determinante D_0 gleich der Summe aus der ursprünglichen D und einer zweiten D_1, bei der die Elemente der i^{ten} Zeile den gemeinsamen Faktor q besitzen, $D_0 = D + D_1$. Nach IV kann man q als Faktor vor die Determinante setzen; dann aber zeigt III, daß D_1 verschwindet. Man hat also $D_1 = D$.

Beispiel I. Es wird die dreireihige Determinante durch die Umformung

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 - x_1 & y_2 - x_2 \\ 0 & z_1 - x_1 & z_2 - x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 - x_1 & y_2 - x_2 \\ z_1 - x_1 & z_2 - x_2 \end{vmatrix}$$

als zweireihige dargestellt.

Beispiel II. Es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & x_2^2(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4(x_4 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & x_2^2(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_2(x_3 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) \\ x_4 - x_1 & x_4(x_4 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 - x_2 & x_3(x_3 - x_2) \\ 1 & x_4 - x_2 & x_4(x_4 - x_2) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & x_3(x_3 - x_2) \\ x_4 - x_2 & x_4(x_4 - x_2) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \cdot (x_4 - x_3)$$

Allgemein findet man auf diese Art den Wert der sogenannten „Potenzdeterminanten“

$$|x_i^{k-1}| = \prod_{\alpha < \beta} (x_\beta - x_\alpha) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n; \alpha = 1, 2, \ldots, n-1; \beta = 2, 3, \ldots, n).$$

§ 9. Ähnlich wie im § 6 können wir hier nach dem Komplex aller der Glieder von D fragen, die $x_{11} x_{22}$ als Faktor haben, und die wir mit

$$x_{11} x_{22} D_{11;22}$$

bezeichnen wollen. Aus (3) ergibt sich sofort das Resultat

$$D_{11;22} \quad \sum_{(\alpha)} (-1)^{[12\alpha_3 \ldots \alpha_n]} x_{3\alpha_3} \cdots x_{n\alpha_n} = \sum_{(\alpha)} (-1)^{[\alpha_3 \ldots \alpha_n]} x_{3\alpha_3} \cdots x_{n\alpha_n}$$

$$\begin{vmatrix} x_{33} & \ldots & x_{3n} \\ x_{n3} & \ldots & x_n \end{vmatrix}$$

Diese $(n-2)$-reihige Determinante nennen wir die Adjunkte von $x_{11}x_{22}$ in D.

In gleicher Weise definieren wir $D_{ik;\,lm}$ durch die Festsetzung, daß das Produkt

$$x_{ik}\,x_{lm}\,D_{ik;\,lm}$$

alle und nur die Glieder von D enthält, die das Elementenprodukt $x_{ik}x_{lm}$ als Faktor haben. Wir nennen $D_{ik;\,lm}$ die Adjunkte von $x_{ik}\,x_{lm}$ in D. Macht man durch Vertauschung von Zeilen und Spalten x_{ik} zum ersten und x_{lm} zum zweiten Gliede der Hauptdiagonale und berücksichtigt (10a), so sieht man: $D_{ik;\,lm}$ entsteht aus D durch Tilgung der i^{ten} und der l^{ten} Zeile sowie der k^{ten} und der m^{ten} Spalte unter Hinzufügung des Faktors

$$(-1)^{[il12\cdots n]+[km\cdots n]},$$

wobei, ausführlicher geschrieben, das Inversionssymbol

$$[il12\cdots n]=[il\,1\,2\cdots(i-1)\,(i+1)\cdots(l-1)\,(l+1)\cdots n] \text{ bei } i<l$$
$$\text{oder } =[il\,1\,2\cdots(l-1)(l+1)\cdots(i-1)(i+1)\cdots n] \text{ bei } i>l$$

und ebenso

$$[km\,1\,2\cdots n]=[km\,1\,2\cdots(k-1)(k+1)\cdots(m-1)(m+1)\cdots n] \text{ bei } k<m$$
$$\text{oder } =[km\,1\,2\cdots(m-1)(m+1)\cdots(k-1)(k+1)\cdots n] \text{ bei } k>m$$

zu setzen ist.

Hieraus folgt

$$D_{ik;\,lm}=-D_{im;\,lk}=-D_{lk;\,im}=D_{lm;\,ik}.$$

Die weitere Ausdehnung des Adjunktenbegriffes ist naheliegend.

§ 10. Im vorigen Paragraphen bildeten wir aus D durch Streichung einer Anzahl von Zeilen und einer gleichen Anzahl von Spalten Determinanten von niedrigerer Reihenzahl $D_{ik}, D_{ik;\,lm}, \ldots$ Solche Determinanten heißen Unterdeterminanten oder Subdeterminanten oder Minoren von D. Aus den Grundlehren der Kombinatorik ergibt sich, daß für ein n-reihiges D

$(n)^2$	$(n-1)$-reihige Minoren
$\left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right)^2$	$(n-2)$- „ „
$\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^2$	$(n-3)$- „ „
. . . .	. . . .
$\left(\frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\right)^2=(n)^2$	1- „ „

vorhanden sind, wobei die Elemente x_{ik} als einreihige Minoren aufge-

faßt werden. — Die Adjunkten sind positiv bzw. negativ zu nehmende Minoren.

Es sei die n-reihige Determinante

$$D = |x_{ik}| \qquad (i,k = 1, 2, \cdots, n)$$

nebst den beiden Minoren von r bzw. von $(n-r)$ Reihen

$$D_1 = |x_{ik}| \qquad (i,k = 1, 2, \cdots, r; r < n)$$

$$D_2 = |x_{ik}| \qquad (i,k = r+1, r+2, \cdots, n)$$

gegeben; wir bilden das Produkt aus beiden Determinantenminoren

$$D_1 D_2 = \sum (-1)^{[\alpha\beta\cdots\gamma]} x_{1\alpha} \cdots x_{r\gamma} \sum (-1)^{[\delta\varepsilon\cdots\zeta]} x_{r+1,\delta} \cdots x_{n\zeta}$$

$$= \sum (-1)^{[\alpha\cdots\gamma]+[\delta\cdots\zeta]} x_{1\alpha} \cdots x_{r\gamma} x_{r+1,\delta} \cdots x_{n\zeta};$$

hier ist jeder der Indizes $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ kleiner als jeder der Indizes $\delta, \varepsilon, \ldots, \zeta$; also wird

$$[\alpha\beta\ldots\gamma] + [\delta\varepsilon\ldots\zeta] = [\alpha\beta\ldots\gamma\delta\ldots\zeta]$$

und somit

$$D_1 D_2 = \sum (-1)^{[\alpha\beta\ldots\zeta]} x_{1\alpha} x_{2\beta} \ldots x_{n\zeta},$$

d. h. das Produkt $D_1 D_2$ besteht aus $r!\,(n-r)!$ Gliedern von D mit entsprechend gleichen Vorzeichen. Diese $r!\,(n-r)!$ Glieder sind sämtlich untereinander verschieden.

Das erlangte Resultat kann folgendermaßen erweitert werden:

Wir setzen die n-reihige Determinante an

$$D' = |x_{ik}| \qquad (i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n;\ k = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

wo die α wie die β eine Permutation von $1, 2, 3, \ldots, n$ bilden. Weiter seien die beiden Minoren von D', die r-reihige

$$D_1' = |x_{ik}| \qquad (i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r;\ k = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

und die $(n-r)$-reihige

$$D_2' = |x_{ik}| \qquad (i = \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n;\ k = \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n)$$

gegeben. Man hat dann nach § 5, (10a)

$$D = (-1)^{[\alpha_1\ldots\alpha_n]+[\beta_1\ldots\beta_n]} D';$$

ferner umfaßt nach dem soeben Bewiesenen das Produkt $D_1' D_2'$ beider Minoren $r!\,(n-r)!$ Glieder von D'; folglich besteht das Produkt

$$(-1)^{[\alpha_1\ldots\alpha_n]+[\beta_1\ldots\beta_n]} D_1' D_2'$$

aus $r!\,(n-r)!$ verschiedenen Gliedern von D.

Wir wollen das mit richtigem, soeben bestimmten Vorzeichen versehene D_2' die Adjunkte von D_1' nennen; diese Adjunkte des Minors D_1' stimmt mit der des Hauptgliedes von D_1' überein, so daß die jetzige Benennung eine naturgemäße Erweiterung der früheren ist.

§ 11. Sind die Zeilen in D_1' für sich und die in D_2' für sich nach wachsender Größe der Indizes geordnet, so daß

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r; \quad \alpha_{r+1} < \alpha_{r+2} < \cdots < \alpha_n,$$

dann läßt sich das Symbol

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r \alpha_{r+1} \ldots \alpha_n],$$

welches in der letzten Formel des § 10 für $D_1 D_2$ auftritt, einfacher darstellen. Das zeigen die folgenden Betrachtungen.

Es liefern $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ untereinander keine Inversionen und ebensowenig $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$. Daher sind zur Feststellung der Inversionsanzahl nur $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ einzeln mit $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$ zu vergleichen. Dabei ruft α_1, mit $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$ verglichen, $(\alpha_1 - 1)$ Inversionen hervor; denn die Zahlen $1, 2, \ldots, (\alpha_1 - 1)$ folgen auf α_1. Ferner ruft α_2, mit $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$ verglichen, $(\alpha_2 - 1)$ Inversionen hervor, da alle kleineren Zahlen außer α_1 auf α_2 folgen. So geht es weiter, und man findet für das Inversionssymbol für die Bestimmung der α

$$\begin{aligned}[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n] &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r) - (1 + 2 + 3 + \cdots + r) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r) - \frac{r(r+1)}{2}.\end{aligned}$$

Sind auch die Spalten in D_1' sowie die in D_2' nach wachsender Größe ihrer Indizes geordnet, so findet man in ähnlicher Art

$$[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n] = (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) - \frac{r(r+1)}{2}.$$

Daher wird, weil $r(r+1)$ stets eine gerade Zahl ist,

$$(-1)^{[\alpha_1 \ldots \alpha_n] + [\beta_1 \ldots \beta_n]} = (-1)^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r) + (\beta_1 + \cdots + \beta_r)}.$$

Ist also insbesondere

$$(13) \qquad \begin{gathered} D_1' = |x_{ik}| \\ (i = 1, 2, \ldots, r;\ k = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r;\ \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_r), \\ D_2' = |x_{ik}| \\ (i = r+1, r+2, \ldots, n;\ k = \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n;\ \beta_{r+1} < \beta_{r+2} < \cdots < \beta_n), \end{gathered}$$

so besteht das Produkt

$$(13\text{a}) \qquad (-1)^{\frac{r(r+1)}{2} + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r)} D_1' D_2'$$

aus $r!\,(n-r)!$ verschiedenen Gliedern von D.

Nun wollen wir in (11) für $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_r$ alle Kombinationen r^{ter} Klasse der Reihe $1, 2, 3, \ldots, n$ nacheinander einsetzen und jedes-

mal das zugehörige Produkt (13) bilden. Die Anzahl dieser Produkte ist gemäß den elementaren Lehren der Kombinatorik gleich

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!},$$

und jedes enthält $r!\,(n-r)!$ Glieder von D. Diese sind sämtlich untereinander verschieden, so daß sie zusammen alle $n!$ Glieder von D liefern, und zwar jedes ein einziges Mal. Folglich erkennt man: Es ist

$$D = \sum (-1)^{\tau} D_1^{(\tau)} D_2^{(\tau)}, \tag{14}$$

wobei der Exponent τ von $(-1)^{\tau}$ durch die Gleichung

$$\tau = \frac{r(r+1)}{2} + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r)$$

bestimmt wird, und wobei

$$\begin{aligned} D_1^{(\tau)} &= x_{ik} \\ &(i = 1, 2, 3, \ldots, r;\ k = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r), \\ D_2^{(\tau)} &= x_{ik} \\ &(i = r+1, r+2, \ldots, n;\ k = \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \ldots, \beta_n;\ \beta_{r+1} < \beta_{r+2} < \cdots < \beta_n) \end{aligned} \tag{14a}$$

bedeutet; die Summe erstreckt sich auf alle $\binom{n}{r}$ wohlgeordneten Kombinationen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ der r^{ten} Klasse von 1, 2, 3, ..., n. Dieses Theorem heißt der Laplacesche Zerlegungssatz. P. S. Laplace hat ihn in seinen „Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde", Paris Acc. des Sciences (1772), 2e part, p. 267 angegeben.

Setzen wir beispielshalber bei $n = 4$ die Determinante

$$D = \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{matrix}$$

und $r = 2$, so wird, ohne Reduktion der Potenzen von (-1) auf ihre Werte $+1$ oder -1,

$$\begin{aligned} D = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{3+5} \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+5} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{3+6} \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+7} \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Es ist nämlich nach der Voraussetzung

$$\frac{r \cdot (r+1)}{2} = 3,$$

und in den sechs Summanden treten die Wertepaare auf

$$\begin{array}{ll} \beta_1 = 1, \ \beta_2 = 2; & \beta_1 = 1, \ \beta_2 = 3; \\ \beta_1 = 1, \ \beta_2 = 4; & \beta_1 = 2, \ \beta_2 = 3; \\ \beta_1 = 2, \ \beta_2 = 4; & \beta_1 = 3, \ \beta_2 = 4. \end{array}$$

§ 12. Durch Ausrechnung überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,\alpha + b\,\beta & a\,\alpha_1 + b\,\beta_1 \\ a_1\alpha + b_1\beta & a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 \end{vmatrix}$$

durch die das Produkt zweier zweireihiger Determinanten wieder als zweireihige Determinante dargestellt wird. Dieses besondere Resultat regt dazu an, allgemein Determinanten von der Bildungsform

$$(15) \qquad D = |c_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3, .., n)$$

$$(15\text{a}) \qquad c_{ik} = x_{i1}\,\xi_{k1} + x_{i2}\,\xi_{k2} + x_{i3}\,\xi_{k3} + \cdots + x_{in}\,\xi_{kn}$$

zu betrachten. Für $n = 3$ hat man also beispielsweise die Gestaltung zu untersuchen

$$(15\text{b}) \qquad D_3 =$$

$$\begin{vmatrix} x_{11}\xi_{11} + x_{12}\xi_{12} + x_{13}\xi_{13} & x_{11}\xi_{21} + x_{12}\xi_{22} + x_{13}\xi_{23} & x_{11}\xi_{31} + x_{12}\xi_{32} + x_{13}\xi_{33} \\ x_{21}\xi_{11} + x_{22}\xi_{12} + x_{23}\xi_{13} & x_{21}\xi_{21} + x_{22}\xi_{22} + x_{23}\zeta_{23} & x_{21}\xi_{31} + x_{22}\xi_{32} + x_{23}\xi_{33} \\ x_{31}\xi_{11} + x_{32}\xi_{12} + x_{33}\xi_{13} & x_{31}\xi_{21} + x_{32}\xi_{22} + x_{33}\xi_{23} & x_{31}\xi_{31} + x_{32}\xi_{32} + x_{33}\xi_{33} \end{vmatrix}$$

Da die für ein beliebiges n geltenden Schlüsse denen für $n = 3$ durchaus analog verlaufen, so reicht es vollständig aus, die Behandlung für diese dreireihige Determinante D_3 (15b) auszuführen.

Nach § 7 zerfällt D_3 in $3^3 = 27$ Determinanten von der Gestalt

$$D_3 = \sum_{\varkappa, \lambda, \mu} \begin{vmatrix} x_{1\varkappa}\xi_{1\varkappa} & x_{1\lambda}\xi_{2\lambda} & x_{1\mu}\xi_{3\mu} \\ x_{2\varkappa}\xi_{1\varkappa} & x_{2\lambda}\xi_{2\lambda} & x_{2\mu}\xi_{3\mu} \\ x_{3\varkappa}\xi_{1\varkappa} & x_{3\lambda}\xi_{2\lambda} & x_{3\mu}\xi_{3\mu} \end{vmatrix}$$

in dieser Summe durchlaufen $\varkappa$, λ, μ unabhängig voneinander die Werte 1, 2, 3. Nach § 4, IV können wir setzen

$$D_3 = \sum_{\varkappa, \lambda, \mu} \xi_{1\varkappa}\,\xi_{2\lambda}\,\xi_{3\mu} \begin{vmatrix} x_{1\varkappa} & x_{1\lambda} & x_{1\mu} \\ x_{2\varkappa} & x_{2\lambda} & x_{2\mu} \\ x_{3\varkappa} & x_{3\lambda} & x_{3\mu} \end{vmatrix} \qquad (\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, 3).$$

Von den $3^3 = 27$ rechts auftretenden Determinanten verschwinden alle, bei denen mindestens zwei der drei Indizes $\varkappa$, λ, μ einander gleich werden (§ 4, III). Es bleiben also nur noch die $6 = 3!$ zurück, in denen die Indizes $\varkappa$, λ, μ sämtlich voneinander verschieden sind. Für alle diese wird die entsprechende Determinante der rechten Seite

$$D_3' = \pm \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

so daß D_3 durch D_3' teilbar, und der Quotient $D_3 : D_3'$ von den x_{ik} unabhängig und eine Funktion der $\xi_{\alpha\beta}$ allein wird. Wir dürfen daher setzen mit noch unbekanntem Q

$$D_3 = Q\,|x_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Eine besondere Annahme über die Elemente x_{ik}, z. B. die einfache Festsetzung

$$\begin{aligned} x_{\varrho\varrho} &= 1 \\ x_{\varrho\sigma} &= 0 \end{aligned} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, 3;\ \varrho \neq \sigma),$$

liefert den Wert von Q. Denn hierfür wird unter Berücksichtigung von (15a)

$$c_{ik} = \xi_{ki}; \quad D_3' = 1; \quad D_3 = |\xi_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Man findet also $Q = |\xi_{ik}|$ und folgert daraus dann für n 3 die Gleichung

$$c_{ik}| \qquad |x_{ik}|$$

Das entsprechende Resultat gilt allgemein für ein beliebiges n. Vertauscht man die Zeilen mit den Spalten in einem oder in beiden der Faktoren, so kommt man zu dem Resultate:

Das Produkt zweier n-reihiger Determinanten

$$x_{ik}| \quad \text{und} \quad \xi_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

ist als n-reihige Determinante $|c_{ik}|$ darstellbar, wo für c_{ik} eine der vier Summenformen gewählt werden kann:

$$\begin{aligned}
c_{ik} &= x_{i1}\xi_{k1} + x_{i2}\xi_{k2} + x_{i3}\xi_{k3} + \cdot \quad + x_{in}\xi_{kn}, \\
c_{ik} &= x_{i1}\xi_{1k} + x_{i2}\xi_{2k} + x_{i3}\xi_{3k} + \cdot \quad + x_{in}\xi_{nk}, \\
c_{ik} &= x_{1i}\xi_{k1} + x_{2i}\xi_{k2} + x_{3i}\xi_{k3} + \cdot \quad + x_{ni}\xi_{kn}, \\
c_{ik} &= x_{1i}\xi_{1k} + x_{2i}\xi_{2k} + x_{3i}\xi_{3k} + \cdot \quad + x_{ni}\xi_{nk}.
\end{aligned}$$

Als Beispiel schreiben wir die Formeln für $n = 2$ ausführlich nieder und kommen zu den Identitäten

$$\begin{aligned}(ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma) &= (a\alpha+b\gamma)(c\beta+d\delta)-(a\beta+b\delta)(c\alpha+d\gamma)\\ &= (a\alpha+c\gamma)(b\beta+d\delta)-(a\beta+c\delta)(b\alpha+d\gamma)\\ &= (a\alpha+c\beta)(b\gamma+d\delta)-(a\gamma+c\delta)(b\alpha+d\beta)\\ &= (a\alpha+b\beta)(c\gamma+d\delta)-(a\gamma+b\delta)(c\alpha+d\beta);\end{aligned}$$

hieraus folgt insbesondere für $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $\delta = d$

$$\begin{aligned}(ad-bc)^2 &= (a^2+bc)(bc+d^2)-(ab+bd)(ac+cd)\\ &= (a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2\\ &= (a^2+bc)(bc+d^2)-(ac+cd)(ab+bd)\\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2.\end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß im allgemeinen

$$|x_{ik}|\cdot|\xi_{ik}| \neq |\xi_{ik}|\cdot|x_{ik}|$$

hinsichtlich der Form der Produktdeterminante ist, während natürlich der numerische Wert beider Seiten der gleiche ist. Für die Produktbildung von Determinanten ist also das Kommutationsgesetz nicht gültig.

§ 13. Unter einer Matrix[1]) von $m \cdot n$ Elementen x_{ik} verstehen wir ein in Form eines Rechtecks angeordnetes Elementensystem von m Zeilen und n Spalten

$$(16)\qquad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn}\end{pmatrix} = (x_{ik}) \quad (i=1,2,\dots,m;\, k=1,2,\dots,n).$$

Dabei ist über das Größenverhältnis von m zu n nichts vorausgesetzt. Bedeutet nun t eine Zahl, die nicht größer ist als die kleinere der beiden Zahlen m, n, und wählt man t beliebige Zeilen und t beliebige Spalten von (16) aus (x_{ik}), so kann man die t^2 Elemente, in denen sich die gewählten Zeilen und Spalten schneiden, ohne Änderung ihrer Folge zu den Elementen einer t-reihigen Determinante machen. Von jeder solchen Determinante sagen wir, daß sie der Matrix (x_{ik}) angehört.

Die kleinere der beiden Zahlen m und n heiße u. Ist dann der Wert von mindestens einer der zur Matrix (x_{ik}) gehörigen u-reihigen Determinanten von Null verschieden, so sagen wir: (x_{ik}) hat den Rang u.

1) Der Begriff der Matrizen wurde von A. Cayley (Journ. f. Math. 50, S. 282, 1855) festgelegt.

Sind dagegen alle u-reihigen, zu (x_{ik}) gehörigen Determinanten gleich Null, aber nicht alle $(u-1)$-reihigen, so sagen wir: (x_{ik}) hat den Rang $(u-1)$; und allgemein, wenn alle zu (x_{ik}) gehörigen $(r+1)$-reihigen Determinanten verschwinden, aber nicht alle r-reihigen, so sagen wir: (x_{ik}) hat den Rang r[1]. Endlich legen wir der Matrix (x_{ik}) den Rang 0 bei, wenn alle x_{ik} gleich 0 sind. Diese Definitionen bergen keinen Widerspruch, da mit den Determinanten von $(r+1)$ Reihen auch die von höherer Reihenzahl verschwinden.

Durch Vermehrung der Reihenzahl kann der Rang einer Matrix wohl zunehmen, jedoch nie abnehmen.

§ 14. Ist eine n-reihige Determinante $|x_{ik}|$ vorgelegt, so bilden wir aus ihren, in gleicher Anordnung genommenen $n \cdot n$ Elementen eine quadratische Matrix. Der Determinante $|x_{ik}|$ legen wir den Rang der Matrix bei; also unabhängig von der Beziehung zu einer Matrix ausgedrückt: verschwinden alle $(r+1)$-reihigen Minoren von $|x_{ik}|$, aber nicht alle r-reihigen, dann hat $|x_{ik}|$ den Rang r.

Beispiele. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 3, da

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -157 \neq 0$$

ist. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 2, da

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 5 \\ 5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, während

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$$

1) Diesen wichtigen Begriff hat G. Frobenius eingeführt (Journ. f. Math. 86, S. 148, 1879).

wird. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 8 & 10 \\ 9 & 3 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 1, da ihre zweireihigen Minoren sämtlich verschwinden, ohne daß die Elemente Null sind.

Zweites Kapitel.

Funktionen.

§ 15. Nachdem wir nun im ersten, vorbereitenden Kapitel die Theorie der Determinanten soweit auseinandergesetzt haben, als es die Anwendungen erfordern, die wir in der Darstellung der Algebra von diesem Hilfsmittel zu machen gedenken, wollen wir einige grundlegende Begriffe besprechen, die für den Aufbau der Algebra unentbehrlich sind. Ihre Bedeutung reicht über die Grenzen dieses Wissenschaftsgebietes hinaus und bringt sich in allen Teilen der Funktionentheorie zur Geltung.

In der Analysis unterscheidet man zwischen unveränderlichen oder konstanten Größen und veränderlichen oder variablen Größen. Jene behalten entweder stets oder doch für den ganzen Verlauf einer Betrachtung denselben Wert; diese können im Laufe einer Betrachtung verschiedene Werte annehmen. Zu den Konstanten gehören natürlich alle Zahlen, mögen sie direkt gegeben oder durch einen Buchstaben angedeutet, aber unbestimmt gelassen sein; die Anfangsbuchstaben der Alphabete, nämlich $a, b, c, d, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ werden häufig zu diesem Zwecke benutzt. Für die Bezeichnung von Variablen gebraucht man meistens die letzten Buchstaben des lateinischen Alphabetes $x, y, z, t, u, \ldots$ und die als entsprechend angenommenen $\xi, \eta, \zeta, \tau, \upsilon, \ldots$ des griechischen.

§ 16. Ist der Wert einer Variablen von dem Werte einer anderen Variablen abhängig, so heißt die erste eine Funktion der zweiten.[1]) So ist das Volum eines Körpers neben anderen auch eine Funktion seiner Temperatur, d. h. es ändert sich, wenn die Temperatur sich ändert; so der Umfang eines Kreises eine Funktion seines Radius. In der Mathematik werden nur solche Funktionen betrachtet, bei denen

---

1) Joh. Bernoulli I. (Paris, Mém. 1718, p. 100): „On appelle ici fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes."

das Gesetz der Abhängigkeit durch einen mathematischen Ausdruck fixiert werden kann. Durch welche Operationen ein derartiger Ausdruck gebildet werden darf, bleibt dabei der Willkür überlassen. Wenn wir z. B. unter $E(a)$ die größte ganze Zahl verstehen, die in der positiven Zahl a enthalten ist, so kann $E(x)$ als Funktion von x betrachtet werden, wobei x von Null ab wachsend variieren darf. Oder wenn wir das Grenzzeichen „lim" als mathematische Operation zulassen, dann wird der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{x^n + x^{-n}}$$

eine Funktion von x, die für $x = 1$ den Wert 1, für alle anderen reellen Werte von x den Wert 0 annimmt. Mit solchen allgemeinen Funktionenbildungen wollen wir uns aber hier nicht beschäftigen, sondern nur mit den einfachsten, mit denen, die in der Algebra auftreten.

Funktionen werden durch Buchstaben $f, g, h, F, G, \varphi, \psi, \ldots$ und auch der Unterscheidung wegen durch diese, mit Indizes versehenen Buchstaben $f_1, G_2, \varphi_0, \ldots$ bezeichnet; will man die Variablen hervorheben, so werden sie, in Klammern geschlossen, hinter die Funktionalbezeichnung gesetzt[1]), also

$$f(x),\ g(\xi),\ h_1(u),\ F(y),\ \varphi_2(\eta),\ \ldots$$

In gleicher Weise verfährt man, wenn die Funktion von mehreren Variablen abhängig ist, wie z. B. die Fläche einer Ellipse von der Länge der beiden Hauptachsen, indem man schreibt

$$f(x; y),\ G(\xi, \eta, \zeta),\ \psi_3(t, u),\ \ldots,$$

sprich „f von x", „g von ξ" usw.

§ 17. Funktionen, die aus Variablen und aus Konstanten durch eine endliche Anzahl von Additionen und Multiplikationen hergestellt sind, heißen rationale ganze Funktionen oder hier, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, kürzer: ganze Funktionen[2]). Die Hinzunahme der Subtraktion zu den gestatteten Operationen würde keine Erweiterung auf andere Funktionen zur Folge haben, da

$$A - B = A + (-B)$$

ist, und die negativen Größen von vornherein Aufnahme finden sollen

1) Viète (1540—1603) bezeichnete Variable und Funktionen durch Vokale. Die jetzt übliche Bezeichnung stammt von Descartes (1596—1650).

2) In der Funktionentheorie versteht man allgemeiner unter ganzen Funktionen von x solche Funktionen, die nur für unendlich große Werte der Variablen x unendlich groß werden, die also in der Form beständig konvergenter Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \text{ in infinitum}$$

darstellbar sind.

als gleichberechtigt mit den positiven. Ebensowenig brauchen wir das Potenzieren mit ganzen positiven Exponenten, da es durch wiederholte Multiplikation ersetzt werden kann

$$x^3 = x \cdot x \cdot x, \quad (1 + y + z)^2 = (1 + y + z)(1 + y + z), \ldots$$

Ganze Funktionen können in mancherlei verwickelten Gestalten auftreten; es gilt aber der Satz: Jede ganze Funktion einer einzigen Variablen x kann auf die „Normalform"

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

gebracht werden, in der $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ Konstanten bedeuten und n eine ganze positive Zahl ist.

Wir wollen diese Behauptung nach der Methode der strengen oder der vollständigen Induktion nachweisen. (Siehe Grundlehren, I. Teil, I. Band, S. 10.)

Wir nehmen an, für die Bildung einer vorgelegten ganzen Funktion $\varphi(x)$ seien k der erlaubten Operationen nötig; wir setzen ferner die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes für alle Funktionen voraus, die durch höchstens $(k-1)$ Operationen gebildet werden können; wir denken uns endlich die $(k-1)$ ersten, zur Bildung von φ erforderlichen Operationen durchgeführt; dann ist die k^{te} Operation eine Addition oder eine Multiplikation, und φ hat bzw. die Form

$$\varphi(x) = A + B \quad \text{oder} \quad \varphi(x) = A \cdot B.$$

Hier entstehen A und B durch weniger als k Operationen, können also nach der Annahme in die Normalform gebracht werden; dann sieht man sofort, daß für $\varphi(x)$ das gleiche gilt.

Für $k = 1$ ist der Satz richtig, also gilt er allgemein für jeden Wert des k.

Die Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen die Koeffizienten der Funktion und n ist ihr Grad.[1])

§ 18. Ebenso können wir beweisen: Jede ganze Funktion zweier Veränderlichen x und y kann auf die „Normalform"

$$(2) \quad f(x, y) = a_{00} + (a_{10} x + a_{01} y) + (a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2) + \cdots \\ + (a_{n0} x^n + a_{n-1,1} x^{n-1} y + \cdots + a_{1,n-1} x y^{n-1} + a_{0n} y^n)$$

gebracht werden. Denn betrachtet man die vorgelegte Funktion zunächst als Funktion von x allein, so kann man ihr nach § 17 die Form

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots A_n x^n \qquad (A_n \neq 0)$$

1) Viète, Ad logisticem speciosam, prop. XXIV; herausgeg. von v. Schooten, Lugd. Batav. 1646.

geben, bei der die $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ ganze Funktionen der y und frei von x sind. Man kann daher

$$\begin{aligned} A_0 &= a_{00} + a_{01}y + a_{02}y^2 + \cdots a_{0m}y^m, \\ A_1 &= a_{10} + a_{11}y + a_{12}y^2 + \cdots a_{1m}y^m, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

setzen, wo nicht alle $a_{0m}, a_{1m} \ldots$ von Null verschieden zu sein brauchen, wo aber keine höhere Potenz von y als die m^{te} auftritt. Trägt man diese Werte für die A in den vorhergehenden Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichungen aus § 17 ein, so entsteht (2).

Die einzelnen Summanden sind von der Gestalt

$$a_{gh}x^g y^h;$$

darin heißt a_{gh} der Koeffizient, $x^g y^h$ das Potenzprodukt des Gliedes und $(g+h)$ seine Dimension. Die höchste in den Gliedern von (2) auftretende Dimension heißt der Grad von $f(x, y)$.[1]

Die Umwandlung einer ganzen Funktion in die Normalform kann auf mancherlei Wegen durchgeführt werden. Daß man aber dabei stets auf den gleichen Ausdruck geführt wird, kann erst später bewiesen werden.

Die angestellten Betrachtungen lassen sich in einfacher Art auf Funktionen von drei und mehreren Variablen erweitern.

§ 19. Haben alle Glieder einer ganzen Funktion die gleiche, etwa die ν^{te} Dimension in den vorkommenden Potenzprodukten, so heißt die Funktion homogen von der ν^{ten} Dimension.[2] So sind die Aggregate

$$ax + by, \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon yz, \quad p\xi^3 + q\xi\eta\zeta + r\xi\zeta^2$$

homogene Funktionen von der Dimension 1, bzw. 2, 3. Eine ganze homogene Funktion heißt eine Form[3]), und zwar bei zwei, drei, vier, ... Variablen binär, ternär, quaternär, ... Die soeben als Beispiele angeführten Formen sind linear binär, bzw. quadratisch ternär und kubisch ternär.

Ist $\varphi(x, y, z, \ldots)$ eine Form von der Dimension ν, so wird, wenn t eine willkürliche Größe bedeutet,

$$\varphi(tx, ty, tz, \ldots) = t^\nu \varphi(x, y, z, \ldots); \tag{3}$$

1) In Frankreich sagt man Grad (degré) auch da, wo wir von Dimension sprechen. — Vgl. L. Euler, Introductio in anal. infinit. I, cap. 5.

2) L. Euler, Introductio in anal. infinit. I, cap. 5, § 83.

3) C. F. Gauß, Disquis. arithm. § 266. In England werden die Formen nach Cayley als Quantics bezeichnet.

umgekehrt ist eine ganze Funktion φ, die diese Gleichung befriedigt, homogen von der ν^{ten} Dimension.[1] In der Tat, ist $qx^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$ ein Glied von φ, so folgt aus der Gleichung

$$q(xt)^\alpha (yt)^\beta (zt)^\gamma \cdots = qt^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$$

die Richtigkeit der Behauptungen.

Jede beliebige ganze Funktion kann durch die Einführung einer neuen Variablen in die Gestalt einer homogenen Funktion gebracht werden. Ist etwa $f(x, y, z)$ vorgelegt, so genügt es, jedes Potenzprodukt

$$qx^\alpha y^\beta z^\gamma \quad \text{durch} \quad qx^\alpha y^\beta z^\gamma u^{\nu-\alpha-\beta-\gamma}$$

zu ersetzen, wenn ν den Grad von f angibt; oder, was auf das gleiche hinausläuft, es genügt, in $f(x, y, z)$ die Variablen

$$x, y, z \quad \text{durch} \quad \frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$$

zu ersetzen und das Resultat mit u^ν zu multiplizieren. Für $u = 1$ kommt man auf die ursprüngliche Funktion $f(x, y, z)$ zurück.

§ 20. Sind in einer ganzen Funktion die Variablen durch untere Indizes voneinander unterschieden, $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, dann heißt die Summe

$$0 \cdot \alpha_0 + 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + 3 \cdot \alpha_3 + \cdots + n \cdot \alpha_n = A$$

das Gewicht des Gliedes

$$x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Haben alle Summanden einer ganzen Funktion der Variablen x das gleiche Gewicht A, so heißt die Funktion isobar vom Gewichte A. So ist die Funktion

$$18\,x_0 x_1 x_2 x_3 - 4\,x_0 x_2^3 - 4\,x_1^3 x_3 + x_1^2 x_2^2 - 27\,x_0^2 x_3^2$$

homogen vom Grade 4 und isobar vom Gewichte 6.

Sind die Funktionen $\varphi(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ und $\psi(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ isobar von den Gewichten μ bzw. ν, so ist ihr Produkt isobar von dem Gewichte $(\mu + \nu)$. Die Richtigkeit dieses Satzes ist leicht nachzuweisen.

Im Verlaufe unserer Untersuchungen werden wir zuweilen auf ganze Funktionen stoßen, die zugleich homogen und isobar sind. So ist z. B. hinsichtlich der α

$$27\,\alpha_0^2\alpha_3^2 - 18\,\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\,\alpha_0\alpha_2^3 + 4\,\alpha_1^3\alpha_3 - \alpha_1^2\alpha_2^2$$

homogen von der Dimension 4 und isobar vom Gewichte 6.

---

1) L. Euler, ibid. § 88.

§ **21.** Die Algebra beschäftigt sich zunächst mit den Eigenschaften der ganzen rationalen Funktionen; doch führt die Natur ihrer Probleme auch zu umfassenderen Funktionengattungen. Unter diesen sind hauptsächlich die gebrochenen rationalen oder kürzer die gebrochenen Funktionen hervorzuheben als einfachste Erweiterung der ganzen Funktionen.

Funktionen, die aus den Variablen und aus Konstanten durch eine endliche Anzahl von Additionen und Multiplikationen und Divisionen abgeleitet werden können, heißen rationale Funktionen. Ist eine rationale Funktion nicht ganz, so ist sie gebrochen.

Als Beispiele führen wir an, etwa

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{x^2}{1-x}}{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}, \quad g(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi + \frac{1}{\eta + \frac{1}{\xi}}},$$

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)^4 + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)^{-4}.$$

Wie man sieht, kann die Gestalt einer solchen rationalen Funktion recht verwickelt erscheinen; aber auch für sie gibt es eine einfache Normalform. Wir weisen nach:

Jede rationale Funktion einer einzigen Variablen kann auf die Normalform eines Quotienten zweier ganzen Funktionen dieser Variablen gebracht werden.

Auch hierfür liefern wir den Beweis durch strenge Induktion (§ 17). Wir nehmen an, der Satz wäre für alle rationalen Funktionen richtig, die sich durch höchstens $(k-1)$ Operationen aus den Konstanten und der Variablen mittels Addition, Multiplikation und Division herstellen lassen. Wir zeigen dann, daß der Satz auch für k Operationen richtig bleibt. Da seine Richtigkeit für $k = 1$ ersichtlich ist, so folgt er für $k = 2, 3, 4, \ldots$ und so allgemein für jedes endliche, wenn auch noch so große k.

Liegt ein mittels k Operationen hergeleiteter Ausdruck vor, so liefert die letzte, bei seiner Berechnung vorzunehmende Operation Aufschluß über den Charakter des Gesamtresultates, ob er eine Summe oder ein Produkt oder ein Quotient ist, also ob er die Form hat

$$A + B \quad \text{oder} \quad A \cdot B \quad \text{oder} \quad A : B.$$

Dabei sind A und B durch weniger als k Operationen darstellbare rationale Funktionen; sie können also auf die Normalform gebracht werden, so daß wir setzen dürfen

$$A = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad B = \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

wo f, g, f_1, g_1 ganze Funktionen von x bedeuten. Dann wird in den drei möglichen Fällen bzw.

$$A + B = \frac{f(x)\, g_1(x) + f_1(x)\, g(x)}{g(x)\, g_1(x)} = \frac{F(x)}{G(x)},$$

$$A \cdot B = \frac{f(x)\, f_1(x)}{g(x)\, g_1(x)} = \frac{F_1(x)}{G_1(x)},$$

$$A : B = \frac{f(x)\, g_1(x)}{g(x)\, f_1(x)} = \frac{F_2(x)}{G_2(x)},$$

wo F, F_1, F_2, G, G_1, G_2 ganze Funktionen der Variablen x sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Reduktion auf die Normalform kann auf verschiedenen Wegen durchgeführt werden; dabei stellt es sich heraus, daß die Darstellungen, auf die man kommt, voneinander verschieden sein können, was bei den ganzen Funktionen nicht der Fall war; so hat man z. B.

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{x-x^2}{x+x^2} = \frac{1-2x+x^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2}{1+2x+x^2}.$$

Wir werden aber später sehen, daß diese Verschiedenheit nur in der Hinzufügung oder der Unterdrückung eines und desselben Faktors im Zähler und Nenner der Normalform bestehen kann.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß bei der Bildung rationaler Funktionen auch Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten benutzt werden dürfen, da ja die Gleichung gilt

$$A^{-n} = \frac{1}{A^n}.$$

Die Erweiterung des Begriffes der rationalen Funktionen einer Variablen auf mehrere und die Einführung der Normalform auch hierbei stößt auf keine Schwierigkeiten. Auch den Begriff der Homogeneität kann man ähnlich wie bei den ganzen Funktionen zur Geltung bringen: Ist der Zähler $Z(x, y, \ldots)$ einer gebrochenen Funktion in ihrer Normalform homogen von der Dimension μ und der Nenner $N(x, y, \ldots)$ homogen von der Dimension ν, so ist die Funktion selbst homogen von der Dimension $(\mu - \nu)$, gleichgültig, ob diese Differenz $(\mu - \nu)$ positiv, Null oder negativ ist, so daß man hat

$$\frac{Z(xt, yt, \ldots)}{N(xt, yt, \ldots)} = \frac{t^\mu\, Z(x, y, \ldots)}{t^\nu\, N(x, y, \ldots)} = t^{\mu-\nu}\, \frac{Z(x, y, \ldots)}{N(x, y, \ldots)}$$

So haben die Funktionen

$$\frac{x+y}{x-y+z}, \quad \frac{x^2(y+z)^2}{xy^2-z^3}, \quad \frac{}{x^2+y^2+z^2}$$

Homogeneität von den Dimensionen 0, 1, -2.

§ 22. Ein weiterer Schritt zur Ausdehnung des Funktionalbegriffes würde darin bestehen, daß man bei der Bildung von Funktionen auch die Ausziehung von Wurzeln mit ganzen Wurzelexponenten in endlicher Anzahl zuläßt. So käme man z. B. auf

$$\sqrt[2]{1+x^2}, \quad \sqrt[3]{\sqrt{\xi}+\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt[4]{t+\sqrt[3]{u+\sqrt{v}}}+\sqrt[4]{t-\sqrt[3]{u-\sqrt{v}}}.$$

Solche Funktionen können wir als radikale Funktionen bezeichnen. Für derartige radikale Funktionen kann man gleichfalls, wie für die rationalen, Normalformen aufstellen; doch werden wir uns erst später mit dieser Frage beschäftigen, wenn es sich um die „Auflösbarkeit" von algebraischen Gleichungen handelt.

§ 23. Eine Verallgemeinerung des Gebietes der radikalen Funktionen ist naheliegend, und damit erschöpfen wir die Funktionen, mit denen sich die Algebra beschäftigt. Die Variable u heißt eine algebraische Funktion von $x, y, z, \ldots$, wenn u eine Gleichung

$$f(x, y, z, \ldots; u) = 0 \tag{4}$$

befriedigt, in der f eine ganze Funktion von $x, y, z, \ldots, u$ bedeutet. So liefert z. B.

$$u^5 + xu^3 + yu^2 + zu + 1 = 0$$

die Variable u als algebraische Funktion von x, y, z.

§ 24. Es mag noch erwähnt sein, daß Funktionen, bei deren Bildung höhere, transzendente Operationen benutzt werden, oder die unendlich viele, wenn auch nur elementare Operationen beanspruchen, den Namen transzendente Funktionen erhalten haben. Zu solchen transzendenten Funktionen gehören also z. B.

$$f(x) = 3^x; \quad g(x) = \log x; \quad h(x, y) = \sin(x \cdot y);$$

$$\varphi(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \text{ (in infinitum)}.$$

Die letzte „unendliche Reihe" als transzendente Funktion anzusehen, könnte Bedenken erregen, da für $-1 < |x| < 1$ die Gleichung gilt

$$\varphi(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x};$$

allein es ist zu beachten, daß $\varphi(x)$ und $1:(1-x)$ wesentlich voneinander unterschieden sind; denn während $\varphi(x)$ nur für $|x| < 1$ einen Sinn hat, ist $1:(1-x)$ für alle Werte von x mit Ausnahme von $x = 1$ definiert.

Ähnliche Betrachtungen knüpfen sich an Funktionen wie

$$\frac{(1-x)\sin x}{\sin x},$$

die für alle Werte von x außer $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ mit der ganzen Funktion $(1 - x)$ übereinstimmt, für diese Ausnahmewerte aber $\frac{0}{0}$ wird.

Ebenso steht es in unserem Belieben, ob wir z. B. die Funktion

$$y = \sin(\arcsin x),$$

die für jeden reellen Wert von x den Wert $y = x$ liefert, als ganze rationale oder als transzendente Funktion auffassen wollen.

§ 25. Wir wollen einige Betrachtungen anstellen, die sich auf den allgemeinen Funktionenbegriff beziehen. Dabei gehen wir von einer ganz beliebigen Funktion $f(x)$ von x aus und bezeichnen diese Funktion kurz durch den Buchstaben y. Wir setzen also

$$y = f(x). \tag{5}$$

Dabei heißt x der Wert des Argumentes oder kurz das Argument.

Im allgemeinen ist mit x zugleich y veränderlich, doch können auch Fälle eintreten, in denen y nur scheinbar von x abhängt, in Wirklichkeit aber eine Konstante ist, wie bei

$$y = x^0; \quad y = 1^x; \quad y = \frac{a^2 - abx}{a - bx}.$$

Diese Eigentümlichkeit hat aber keinen Einfluß auf unsere Betrachtungen.

Während x unabhängig veränderlich ist, wird y eine von den Werten des x abhängige Veränderliche. Die Abhängigkeitsbeziehung läßt sich durch die Ausrechnung und die daran geknüpfte Aufstellung einer numerischen Tabelle ersichtlich machen. Allbekannte Beispiele hierfür sind die Logarithmentafeln sowie die Tafeln der goniometrischen Funktionen. Um zu einer solchen Tabelle für $y = f(x)$ zu gelangen, geben wir dem x, als der unabhängigen Veränderlichen, eine Reihe von Werten, etwa solche, bei denen die Differenzen zweier benachbarter einen konstanten Betrag d haben, während x_0 einen festen Wert bedeutet, so daß diese Werte eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden,

$$\ldots, x_0 - 3d, x_0 - 2d, x_0 - d, x_0, x_0 + d, x_0 + 2d, x_0 + 3d, \ldots;$$

dann berechnen wir die zugehörigen Funktionalwerte, die in der Gestalt auftreten

$$\ldots, f(x_0 - 3d), f(x_0 - 2d), f(x_0 - d), f(x_0), f(x_0 + d), f(x_0 + 2d),$$
$$f(x_0 + 3d), \ldots,$$

und stellen diese beiden Wertreihen entsprechend zusammen. So ergibt sich z. B. für die Funktion

$$y = f(x) = 1 + 2x + 3x^2$$

bei $(d = 1)$ wegen

$$f(-3) = 1 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 22, \quad f(-2) = 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 9,$$
$$f(-1) = 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2, \quad f(0) = 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 1,$$
$$f(1) = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6, \quad f(2) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 17,$$
$$f(3) = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 34, \quad f(4) = 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 16 = 57,$$
$$f(5) = 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 25 = 86, \cdots$$

die übersichtliche Tabelle der Wertepaare x, y, bei der je zwei untereinander stehende Werte von x und von y sich entsprechen, also die Gleichung $y = 1 + 2x + 3x^2$ befriedigen,

$x =$	···;	−3;	−2;	−1;	0;	1;	2;	3;	4;	5; ···
$y =$	···;	22;	9;	2;	1;	6;	17;	34;	57;	86;

Für die gebrochene Funktion

$$y = g(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} = \frac{3-2x}{(1-x)(2-x)} = \frac{-2x+3}{x^2-3x+2}$$

ergibt sich in gleicher Art die Tabelle der Argumente und der Funktionalwerte

$x =$	···;	0;	0,25;	0,50;	0,75;	0,9;		1,1;
$y =$	···;	1,5;	1,904···;	2,666···;	4,8 ;	10,909···;	∞;	−8,8

$x =$	1,25;	1,5;	1,75;	1,9;	2;	2,1;	2,25;	2,5;	
$y =$	−2,666;	0;	2,666···;	8,888···;	∞;	−10,909;	−4,8;	−2,666···;	···

§ **26.** In den beiden Beispielen des vorigen Paragraphen gehörte zu einem Werte von x auch nur ein einziger Wert von y. Funktionen, bei denen das eintritt, heißen eindeutige Funktionen. Jede rationale Funktion ist eindeutig.

Gehören zu einem Werte von x mehrere Werte von $f(x)$, so heißt $f(x)$ eine mehrdeutige Funktion von x, und zwar je nach der Anzahl ihrer Werte eine doppeldeutige, eine dreideutige, vierdeutige usf. Es gibt auch unendlich-vieldeutige Funktionen; so z. B. erkennen wir: die Funktion

$y = a + \sqrt{1 + x}$ ist doppeldeutig,

$y = \sqrt[3]{b + x^2}$ ist dreideutig,

$y = \sqrt{a + x} + \sqrt{b + x^2}$ ist vierdeutig,

$y = \arcsin x$ ist unendlich-vieldeutig.

Diese letzte auf arc sin x bezügliche Behauptung gründet sich darauf, daß ein „Bogen, dessen Sinus gleich x ist“, d. h. arc (sin $= x$) oder arc sin x diese Eigenschaft beibehält, wenn man diesen Bogen um ein beliebiges Vielfaches des Kreisumfanges vermehrt oder um ein solches vermindert. Setzt man also arc sin $x = y$, so ist auch

$$\operatorname{arc}\sin x = y \pm 2k\pi \text{ bei } (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots).$$

§ **27.** Die im § 25 besprochene tabellarische Übersicht über den Verlauf einer Funktion $y = f(x)$ durch Angabe der Werte von y, die zu gegebenen Werten von x gehören, hat den Mangel, daß sie der Anschaulichkeit entbehrt. Deshalb setzen wir ihr eine andere zur Seite, die diesen Mangel dadurch vermeidet, daß sie das durch $y = f(x)$ bestimmte Abhängigkeitsverhältnis geometrisch darstellt, aber freilich für rechnerische Verwendung weniger tauglich ist.

Zunächst repräsentieren wir alle Werte der reellen Zahlenreihe $-\infty, \cdots, 0, \cdots, +\infty$ durch die Gesamtheit der Punkte einer Geraden. Wir fixieren auf einer willkürlichen geraden Linie zwei Punkte O und E, den Anfangs- oder Nullpunkt und bzw. den Einheitspunkt. Die Entfernung OE nehmen wir als Längeneinheit und setzen zugleich die Richtung OE als positive, folglich die Richtung EO als negative Richtung fest. Dann ordnen wir jeden reellen Zahlenwert α dem Punkt der Geraden zu, dessen Entfernung von O durch die absolute Größe von α gemessen wird, und der dabei in der Richtung OE oder EO liegt, je nachdem α positiv oder negativ ist. Umgekehrt ordnen wir jedem Punkte A der Geraden den Zahlenwert zu, dessen absolute Größe gleich OA ist, gemessen durch OE als Einheit, und dessen Vorzeichen das positive oder das negative wird, je nachdem die Richtung OA mit der Richtung OE oder mit der Richtung EO zusammenfällt. Hiernach werden z. B. alle positiven Zahlen auf dem Strahl oder der Halbgeraden von O in der Richtung OE dargestellt; die positiven echten Brüche auf der Strecke OE usf. Eine derartige Zuordnung nennt man eine Abbildung oder ein Bild, und zwar, wenn wie hier jedem Individuum der einen Menge eins und nur eins der anderen entspricht, eine gegenseitig eindeutige oder kürzer eine ein-eindeutige Abbildung. Gewöhnlich legt man OE horizontal und nimmt als positive Richtung die von links nach rechts an.

Bei dieser Zuordnung ist stillschweigend eine grundsätzlich wichtige Voraussetzung gemacht, nämlich die, daß nicht nur, wie ersichtlich, jeder Rationalzahl, sondern auch jeder Irrationalzahl eine bestimmte Strecke entspreche. G. Cantor hat wohl zuerst[1]) darauf aufmerksam gemacht, daß diese Annahme weder selbstverständlich noch

1) Math. Ann. 5 (1872), S. 128.

beweisbar erscheine, vielmehr ein wesentliches, rein geometrisches Axiom in sich schließe. — Hinsichtlich dieser Frage verweisen wir auf die Darlegungen von A. Pringsheim[1]) und nehmen hier eine solche gegenseitige Zuordnung als vorhanden an.

§ 28. Nun können wir also die unbegrenzte Wertreihe $x = -\infty, \ldots, 0, \cdots, +\infty$ den Punkten einer Geraden eindeutig zuordnen und gewinnen damit ein anschauliches Bild für die Werte des Argumentes x der Funktion $y = f(x)$. Die Werte der Funktion y bilden wir in gleicher Weise auf einer zweiten Geraden ab und nehmen dabei der Einfachheit halber für beide Gerade die gleiche Längeneinheit. Die erste der beiden Geraden nennen wir die X-Achse, die zweite die Y-Achse. Beide Achsen legen wir rechtwinklig zueinander in dieselbe Ebene und wählen als den Schnittpunkt beider den gemeinsamen Anfangspunkt O. Die positiven Richtungen der Achsen können wir willkürlich annehmen. Wir wollen festsetzen, daß die Ebene beider Achsen horizontal liege; daß die X-Achse von links nach rechts und die Y-Achse von hinten nach vorn positiv verlaufe. Dann wird durch jedes beliebige Wertepaar für x und y, welches wir durch $(x = a \,/\, y = b)$ oder auch durch $(x/y) = (a/b)$ bezeichnen, ein Punktpaar auf den Achsen bestimmt, und umgekehrt. Wird nun a willkürlich und b so gewählt, daß $b = f(a)$ ist, dann entspricht der Inbegriff dieses Punktpaares $(x/y) = (a/b)$ der Funktion $y = f(x)$. Dabei läßt sich auf mancherlei Arten das Punktpaar (x/y) auf den Achsen unserer Anschauung näher führen. So könnten wir z. B. die Verbindungsgerade des Punktes a auf der X-Achse mit dem Punkte $b = f(a)$ auf der Y-Achse als Repräsentantin des Punktpaares $(x = a \,/\, y = b)$ ansehen und den Inbegriff aller dieser Verbindungslinien als Bild der funktionellen Abhängigkeit, die durch die Gleichung $y = f(x)$ zwischen den beiden Variablen x und y festgesetzt wird. Diese Darstellung würde aber einigermaßen kompliziert werden und sich nicht übersichtlich genug gestalten. Um einen Begriff von den einschlägigen Verhältnissen zu geben, wählen wir als Beispiel die Funktion

$$y = x^2$$

und geben an, ohne auf den Beweis einzugehen, daß die Gesamtheit der besprochenen Verbindungslinien mit der Schar der Tangenten eines Kegelschnittes, und zwar einer Parabel, identisch ist, die die X-Achse im Nullpunkte berührt und die negative Seite der Y-Achse zur Symmetrieachse hat. Die Geraden spielen dabei die Rolle von „Linienkoordinaten“ der Parabel.[2])

---

1) Enzyklop. d. math. Wiss. I, A 3, Nr. 4, S. 53.

2) Derartige Darstellungen sind durch Plücker in seinen „Analytisch-geometrischen Entwicklungen“ (1831) eingeführt worden.

Eine andere Darstellung des Punktpaares (x/y) würde sich ergeben, wenn man als Repräsentanten des Punktpaares $(x = a / y = b)$ den Kreis wählt, der durch beide Punkte und durch den Schnittpunkt der Achsen hindurch geht. Dabei würde das Abhängigkeitsverhältnis durch eine eigenartige Schar von Kreisen dargestellt werden.

Zu einer einfacheren Veranschaulichung eines Punktpaares (x_1/y_1) kommen wir auf folgende Weise: Wir ziehen durch Q, den Punkt x_1 der horizontalen Achse, eine Parallele zur vertikalen und durch R, den Punkt y_1 der vertikalen, eine Parallele zur horizontalen Achse und nehmen den Schnittpunkt der beiden Parallelen als Bild des Punktpaares (x_1/y_1). Die Aufeinanderfolge der so erhaltenen Schnittpunkte entspricht der Beziehung $y = f(x)$, derart, daß die Werte $OQ = x_1$, $OR = y_1$ jeder so erhaltenen Schnittpunkte $P = (x_1/y_1)$ die Gleichung $y_1 = f(x_1)$ befriedigen. Wir sagen, P habe die Abszisse $OQ = x_1$ und die Ordinate $OR = y_1$; wir nennen x_1 und y_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P.

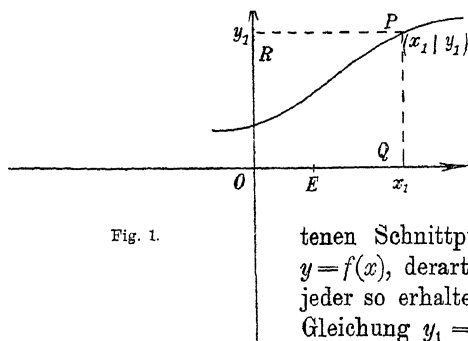



Fig. 1.

Da es nicht möglich ist, zu jedem Punkte Q der X-Achse den Punkt P mit der Ordinate $y = f(x)$ zu besetzen oder zu konstruieren, so muß man sich damit begnügen, eine Anzahl nahe aneinander liegender Punkte zu $y = f(x)$ zu zeichnen, um dadurch eine Anschauung zu gewinnen.[1]) Vgl. § 30 über diesen Punkt.

Wie man sieht, versagt diese Darstellung, sobald man bei den Koeffizienten oder den Variablen das Gebiet der reellen Größen verläßt und komplexe Werte zuläßt.

§ **29.** In ähnlicher Art wie von $y = f(x)$ in der Ebene kann man unter Benutzung des dreidimensionalen Raumes eine Abbildung der Funktionen

$$z = g(x, y)$$

von zwei Variablen x und y erlangen. Hier sind x, y unabhängig veränderlich, während der Wert von z zwar im allgemeinen veränderlich, aber dabei doch von den Werten des x und des y abhängig ist, so daß zu jedem Wertpaar (x_1/y_1) ein Wert oder mehrere Werte von

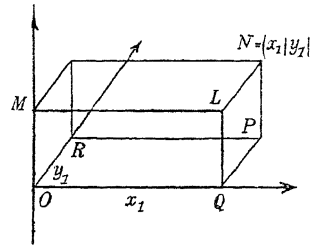
1) Die systematische Benutzung der Koordinaten zur Untersuchung von Kurven stammt von Descartes (1596—1650) her. Abszisse und Ordinate sind von Leibniz, Acta Erud. 1692, Koordinaten genannt worden.

z_1 vermöge der Gleichung $z_1 = g(x_1, y_1)$ gehören, die sich aus dieser Gleichung berechnen lassen.

Für die Darstellung der (x/y) behalten wir die im vorigen Paragraphen benutzte Ebene bei und für die Darstellung des z wählen wir eine in O senkrecht auf dieser Ebene stehende Gerade, die Z-Achse, von gleicher Längeneinheit wie OE. Die, übrigens willkürliche, positive Richtung der Z-Achse wollen wir folgendermaßen festlegen: Ein Beobachter stehe in O auf der XY-Ebene so, daß er, längs der positiven Halbachse der Y-Achse entlang sehend, die positive Halbachse der X-Achse zur Rechten hat; dann soll die positive Halbachse der Z-Achse so gewählt werden, daß sie durch den Beobachter hindurch geht in der Richtung von den Füßen zum Kopfe.

Um jetzt das Punkttripel $(x_1/y_1/z_1)$ geometrisch darzustellen, wählen wir auf den drei Achsen je einen Punkt Q, R, M, so daß $OQ = x_1$, $OR = y_1$, $OM = z_1$ wird, unter Berücksichtigung der Vorzeichen. Durch jeden der Achsenpunkte Q, R, M legen wir eine Ebene, parallel zu den beiden andern Achsen, bzw. QPN, RPN, MLN. Diese drei Ebenen schneiden sich in dem Punkte N, der als Repräsentant von $(x_1/y_1/z_1)$ gelten soll: $N = (x_1/y_1/z_1)$.

Fig. 2.

Die Gesamtheit aller Tripel $(x_1/y_1/z_1)$, die der vorgelegten Gleichung $z_1 = g(x_1, y_1)$ genügen, liefert für N als Ort eine Fläche, die als Bild der Gleichung gelten kann.

§ **30.** Wir haben bereits am Schlusse von § 28 auf einen noch näher zu untersuchenden Punkt aufmerksam gemacht. Es können bei der geometrischen Darstellung der zu $y = f(x)$ gehörigen Wertepaare (x/y) im allgemeinen nur Bildpunkte in endlicher Menge angegeben werden; man muß sich folglich damit begnügen, nahe aneinander liegende Werte von x anzunehmen, die zugehörigen Werte von y zu bestimmen und dann die zwischenliegenden Werte passend zu ergänzen. Das kann aber nur dann zu brauchbaren Resultaten führen, wenn bei geringer Änderung der unabhängigen Variablen auch die abhängige nur geringe Änderungen erfährt, wenn also, wie man sagt, die Funktion stetig oder kontinuierlich ist. Daß die Stetigkeit keine notwendige Eigenschaft aller Funktionen ist, zeigen die Beispiele

$$f(x) = E(x), \qquad g(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}$$

aus § 16; nimmt x bei ganzzahligem positiven Werte um beliebig wenig ab, so vermindert sich sofort der Wert von $f = E(x)$ um eine Ein-

heit. Bei der Funktion $g(x)$ tritt für $x = 1$ Unstetigkeit ein, wie bereits in § 16 angegeben wurde.

Es sei (x_0/y_0) ein Wertepaar, das die Gleichung

$$y_0 = f(x_0)$$

erfüllt. Ferner sei $(x_0 + h)$ ein zweiter Wert der Variablen x (bei positivem oder negativem reellen h), und der zugehörige Funktionenwert

$$y_0 + k = f(x_0 + h);$$

also wird $(x_0 + h/y_0 + k)$ ein zu der Funktion

$$y = f(x) \tag{5}$$

gehöriges Wertepaar. h bzw. k wird als Zuwachs oder Inkrement von x und bzw. von y bezeichnet. Wenn mit abnehmendem und zur Grenze Null gehenden h auch k zur Grenze Null geht, d. h. wenn

$$\lim_{h=0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0,$$

dann heißt $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig. Es ist also dann möglich, zu jedem beliebig kleinen, gegebenen absoluten Werte k_0 einen absoluten Wert h_0 zu bestimmen, so daß stets

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < k_0, \quad \text{wenn} \quad |h| < h_0 \tag{6}$$

ist. Wir wollen einige elementare Eigenschaften stetiger Funktionen herleiten.

§ **31.** I. Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig, so ist es auch ihre Summe. Der Voraussetzung nach kann man zwei Werte h_0' und h_0'' so bestimmen, daß

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \frac{1}{2} k_0, \quad \text{wenn} \quad |h| < h_0',$$

und

$$|g(x_0 + h) - g(x_0)| < \frac{1}{2} k_0, \quad \text{wenn} \quad |h| < h_0'';$$

denn offenbar darf in (6) auch $\frac{1}{2} k_0$ an die Stelle von k_0 gesetzt werden.

Ist nun h_0 eine absolute Größe, die kleiner ist als die kleinere der beiden Größen h_0', h_0'', so wird

$$\left.\begin{aligned} |f(x_0 + h) - f(x_0)| &< \frac{1}{2} k_0, \\ |g(x_0 + h) - g(x_0)| &< \frac{1}{2} k_0, \end{aligned}\right\} \quad \text{wenn} \quad |h| < h_0.$$

Durch Addition ergibt sich hieraus (vgl. Grundlehren, I, I, S. 359ff.)

$$|(f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0))| < k_0, \quad \text{wenn} \quad |h| < h_0;$$

damit ist der Beweis des Satzes geliefert.

II. Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig, so ist es ihr Produkt gleichfalls. Wir suchen auch hier ein zu k_0 gehöriges h_0 für (6) zu bestimmen. Es sei die absolute Größe A größer als die größere der beiden Größen $|f(x_0)|$ und $|g(x_0)|$. Ferner nehmen wir von vornherein $k_0 < 4A^2$, was erlaubt ist, da $\lim k_0 = 0$ ist, und bestimmen eine absolute Größe K, die der Bedingung

$$K < \frac{k_0}{2A}\left(1 - \frac{k_0}{4A^2}\right)$$

genügt. Ersetzt man in (6) k_0 durch diese Größe K, dann läßt sich, wie im Beweise des vorigen Satzes I gezeigt ist, eine absolute Größe h_0 so bestimmen, daß zugleich

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < K,$$

und

$$|g(x_0 + h) - g(x_0)| < K, \qquad \text{wenn} \quad |h| < h_0$$

ist. Daher wird

$$|f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)|$$
$$= |(f(x_0 + h) - f(x_0))(g(x_0 + h) - g(x_0)) + f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))$$
$$+ g(x_0)(f(x_0 + h) - f(x_0))| < KK + AK + AK = K^2 + 2AK$$
$$< \frac{k_0^2}{4A^2}\left(1 - \frac{k_0}{4A^2}\right)^2 + k_0\left(1 - \frac{k_0}{4A^2}\right) = k_0 - \frac{k_0^3}{8A^4}\left(1 - \frac{k_0}{8A^2}\right),$$

und da $k_0 < 4A^2 < 3A^2$, also die Klammergröße positiv ist,

$$|f(x_0 + h)\, g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)| < k_0, \quad \text{wenn} \quad |h| < h_0.$$

Damit ist der Beweis des Satzes II geliefert.

III. Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig, und ist $g(x_0)$ von Null verschieden, so ist auch der Quotient $f(x) : g(x)$ an der Stelle x_0 stetig.

Die Größe A möge größer sein als die größere der beiden Größen $|f(x_0)|$ und $|g(x_0)|$, und $|g(x_0)|$ werde mit B bezeichnet. Die Größe k_0 nehmen wir, was wegen $\lim k_0 = 0$ möglich ist, von vornherein kleiner an als $\frac{2A}{B}$ und wählen endlich eine Größe

$$L < \frac{k_0 B^2}{k_0 B + 2A}.$$

Dann können wir eine absolute Größe h_0 so bestimmen, daß man hat

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < L,$$
$$|g(x_0 + h) - g(x_0)| < L, \qquad \text{wenn} \quad | < h_0.$$

Nun wird

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right| = \left|\frac{(f(x_0+h)-f(x_0))\,g(x_0)-(g(x_0+h)-g(x_0))\,f(x_0)}{g^2(x_0)+(g(x_0+h)-g(x_0))\,g(x_0)}\right|$$
$$< \frac{LA+LA}{B^2-BL},$$

da im letzten Ausdrucke gegen den vorletzten der Zähler vermehrt und der Nenner vermindert worden ist. Weiter folgt, wenn wir den Wert von L eintragen,

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right| < \frac{2Ak_0B^2}{(k_0B+2A)\,(B^2-B^3k_0:[k_0B+2A])}$$
$$< \frac{2Ak_0B^2}{(k_0B+2A)\,B^2-B^3k_0} = k_0, \quad \text{wenn } |h|<h_0.$$

Hierdurch ist der Satz III dieses Paragraphen bewiesen.

Die im letzten Theoreme ausgesprochene Beschränkung auf Stellen x_0, in denen der Nenner $g(x_0)$ nicht verschwindet, erweist sich leicht als notwendig. So ist z. B. für die Funktion

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$$

das Inkrement

$$k = \frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0} = -\frac{h}{x_0^2+hx_0},$$

die Funktion y an allen Stellen $x_0 \neq 0$ stetig; für $x_0 = 0$ dagegen nicht, weil k für beliebig kleine Werte von h stets unendlich groß wird.

Bedenkt man nun zusammenfassend, daß erstens jede Konstante als stetige Funktion von x angesehen werden kann, bei der der Zuwachs k sogar stets gleich Null wird; und daß zweitens $y = x$ eine stetige Funktion von x mit $k = h$ ist, so folgt aus den drei in diesem Paragraphen bewiesenen Sätzen, daß jede rationale Funktion für jeden Wert des Arguments, der den Nenner nicht zu Null macht, Stetigkeit besitzt.

Ist eine Funktion für alle zwischen $x = a$ und $x = b$ gelegenen Werte stetig, so heißt sie f ü r d a s g a n z e I n t e r v a l l $(a, \ldots, b)$ s t e t i g. Nach dem soeben Besprochenen gilt also das Theorem IV: J e d e r a t i o n a l e F u n k t i o n i s t f ü r j e d e s I n t e r v a l l s t e t i g, i n d e m s i e n i c h t u n e n d l i c h g r o ß w i r d.

Es möge hier noch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß weder die Definition (6) der Stetigkeit noch die daraus hergeleiteten Sätze dieses Paragraphen reelle Werte der Koeffizienten oder des Argumentes der Funktionen voraussetzen.

§ 32. Wir haben den Begriff der Stetigkeit in der ausgesprochenen Absicht eingeführt, die geometrische Darstellung von Funktionen zu

rechtfertigen; wir können diesen Begriff aber auch als Grundlage zu weitergehenden Überlegungen benutzen.

Wir vergleichen den Zuwachs h des Argumentes x_0 mit dem Zuwachs $f(x_0+h)-f(x_0)$ der ganzen Funktion $f(x)$. Es sei die Normalform dieser ganzen Funktion

$$f(x)=\alpha_0 x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}x^1+\alpha_n;$$

dann liefert der binomische Satz

$$\begin{aligned}f(x+h) &= \alpha_0(x+h)^n+\alpha_1(x+h)^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}(x+h)^1+\alpha_n\\ &= \alpha_0\left[x^n+nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n\right]\\ &\quad+\alpha_1\left[x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}h+\binom{n-1}{2}x^{n-3}h^2+\cdots+h^{n-1}\right]\\ &\quad+\alpha_2\left[x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}h+\binom{n-2}{2}x^{n-4}h^2+\cdots+h^{n-2}\right]\\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\quad+\alpha_{n-1}[x+h]+\alpha_n.\end{aligned}$$

Nach steigenden Potenzen von h geordnet ergibt dies

$$\begin{aligned}f(x+h) &= [\alpha_0 x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n]\\ &\quad+[n\alpha_0 x^{n-1}+(n-1)\alpha_1 x^{n-2}+(n-2)\alpha_2 x^{n-3}+\cdots+\alpha_{n-1}]\frac{h}{1}\\ &\quad+[n(n-1)\alpha_0 x^{n-2}+(n-1)(n-2)\alpha_1 x^{n-3}\\ &\qquad\qquad+(n-2)(n-3)\alpha_2 x^{n-4}+\cdots+2\cdot 1\,\alpha_{n-2}]\frac{h^2}{1\cdot 2}\\ &\quad\ldots\\ &\quad+\alpha_0 h^n.\end{aligned}$$

Dies schreiben wir abgekürzt so:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2}+f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!},\tag{7}$$

indem wir setzen

$$\begin{aligned}f'(x) &= n\alpha_0 x^{n-1}+(n-1)\alpha_1 x^{n-2}+(n-2)\alpha_2 x^{n-3}+\cdots+\alpha_{n-1},\\ f''(x) &= n(n-1)\alpha_0 x^{n-2}+(n-1)(n-2)\alpha_1 x^{n-3}\\ &\qquad+(n-2)(n-3)\alpha_2 x^{n-4}+\cdots+2\cdot 1\,\alpha_{n-2},\\ &\ldots\end{aligned}$$

Den Ausdruck $f'(x)$ nennen wir die erste Ableitung oder kürzer, wenn Mißdeutungen ausgeschlossen sind, die Ableitung von $f(x)$; weiter $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ die zweite, die dritte, ..., die n^{te} Ableitung von $f(x)$.

Reduziert sich $f(x)$ auf ein einziges Glied

$$f(x) = \alpha_\lambda x^\lambda, \quad \text{so wird} \quad f'(x) = \lambda \alpha_\lambda x^{\lambda-1}.$$

Erscheint $f(x)$ als Summe zweier ganzer Funktionen

$$(8) \qquad f(x) = g(x) + k(x), \quad \text{so wird} \quad f'(x) = g'(x) + k'(x).$$

Aus diesen beiden leicht ersichtlichen Sätzen folgt, daß $f''(x)$ die erste Ableitung von $f'(x)$ ist, und daß allgemein die $(\alpha+\beta)^{\text{te}}$ Ableitung die α^{te} der β^{ten} ist und auch die β^{te} der α^{ten}.

§ 33. Wir haben soeben die Ableitung einer Summe $g(x)+k(x)$ aus den Ableitungen ihrer Summanden hergestellt; wir fragen jetzt nach der Ableitung eines Produktes zweier ganzen Funktionen $f(x) = g(x)\,k(x)$. Es ist

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)\frac{h}{1} + g''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + \cdots,$$

$$k(x+h) = k(x) + k'(x)\frac{h}{1} + k''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + \cdots,$$

also

$$f(x+h) = g(x+h)\,k(x+h) = g(x)\,k(x) + [g'(x)k(x) + g(x)k'(x)]h + \cdots,$$

d. h., wenn wir den Koeffizienten von h rechts gleich der Ableitung von $f(x)$ setzen,

$$(9) \qquad [g(x)k(x)]' = g'(x)k(x) + g(x)k'(x).$$

Schreiben wir dies in der Form

$$(9\text{a}) \qquad \frac{[g(x)k(x)]'}{g(x)k(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{k'(x)}{k(x)},$$

so beweist man durch strenge Induktion leicht die Gültigkeit der allgemeinen Formel

$$(10) \qquad \frac{\left[\prod_{\alpha=1}^{r} f_\alpha(x)\right]'}{\prod_{\alpha=1}^{r} f_\alpha(x)} = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{f'_\alpha(x)}{f_\alpha(x)}.$$

Werden die r Faktoren des Produktes einander gleich, so entsteht aus (10) die speziellere Form

$$(11) \qquad (\varphi(x)^n)' = n\varphi(x)^{n-1}\cdot\varphi'(x).$$

Für das Produkt

$$g(x) = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma \ldots (x-d)^\delta$$

folgt aus (10)

$$(12) \qquad \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c} + \cdots + \frac{\delta}{x-d}.$$

Es heißt dies: die Partialbruchzerlegung von $g'(x) : g(x)$.

§ **34.** Unsere Definition der Ableitung stützte sich auf die Darstellung (7) von $f(x+h)$ in eine endliche nach Potenzen von h fortschreitende Reihe. Aus ihr folgt nun

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x), \tag{13}$$

und diese Gleichung für $f'(x)$ können wir als weitergehende, allgemeinere Definition der Ableitung von $f(x)$ nehmen. Danach läßt sich die Ableitung des Quotienten zweier ganzen Funktionen $g(x):k(x)$ leicht bestimmen. Es wird

$$\frac{g(x+h)}{k(x+h)} - \frac{g(x)}{k(x)} = \frac{[g(x+h)-g(x)]k(x) - [k(x+h)-k(x)]g(x)}{k(x+h)k(x)},$$

und daraus durch Division mit h

$$\lim_{h=0} \left\{ \frac{g(x+h)}{k(x+h)} - \frac{g(x)}{k(x)} \right\} : h$$

$$= \lim_{h=0} \left\{ \frac{g(x+h)-g(x)}{h} k(x) - \frac{k(x+h)-k(x)}{h} g(x) \right\} : [k(x+h)k(x)],$$

$$\left[\frac{g(x)}{k(x)}\right]' = \frac{g'(x)k(x) - g(x)k'(x)}{k(x)^2}. \tag{14}$$

Insbesondere erhält man für $g(x)=1$ und $g'(x)=0$ die Ableitung der reziproken Funktion von $k(x)$, nämlich

$$\left[\frac{1}{k(x)}\right]' = -\frac{k'(x)}{k(x)^2}. \tag{15}$$

Ein anderes Beispiel, welches auch aus dem Bereiche der ganzen Funktionen herausführt, ist das folgende. Es sei die Funktion vorgelegt

$$f(x) = \sin x,$$

dann wird

$$f(x+h) - f(x) = \sin(x+h) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

und

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}$$

Nun ist leicht durch geometrische Betrachtungen einfachster Natur zu zeigen, daß für abnehmende und zur Grenze 0 gehende Werte von ε

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

wird. Danach folgt

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x. \tag{16}$$

Ähnlich beweist man die Beziehung

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{16a}$$

Allgemeiner findet man

$$\begin{cases} (\sin(ax+b))' = +a\cdot\cos(ax+b), \\ (\cos(ax+b))' = -a\cdot\sin(ax+b). \end{cases} \tag{17}$$

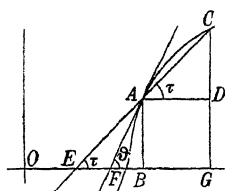
§ 35. Die geometrische Veranschaulichung können wir auch hier benutzen, um in das Wesen und die Bedeutung der Ableitung tiefer einzudringen.

Die Kurve AC der Figur sei das Bild der Funktion $y = f(x)$. Auf ihr mögen die beiden Punkte

Fig. 3.

$$A = (x/y) \quad \text{und} \quad C = (x+h/y+k)$$

liegen, so daß

$$OB = x,\ \ BA = y = f(x);$$
$$OG = x+h,\ \ GC = y+k = f(x+h);$$
$$BG = h,\ \ DC = k = f(x+h) - f(x)$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \frac{DC}{BG} = \operatorname{tang} DAC = \operatorname{tang}\tau.$$

Läßt man jetzt $BG = h$ mehr und mehr abnehmen und zur Grenze 0 gehen, dann wird der Punkt C sich auf der Kurve dem Punkte A nähern und schließlich wird C mit A zusammenfallen. Dabei dreht sich die Sekante EAC um den festen Punkt A und geht in der Grenzlage über in die Tangente TA, die im Punkte A an die Kurve $y = f(x)$ gelegt werden kann. Bildet diese Tangente mit der positiven Richtung der X-Achse den Winkel ϑ, so folgt

$$y' = f'(x) = \lim_{h=0} \operatorname{tang}\tau = \operatorname{tang}\vartheta,$$

d. h. die Ableitung $f'(x) = y'$ der Funktion $f(x) = y$ ist die goniometrische Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente im Punkte $(x/y) = A$ der Kurve $y = f(x)$ mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Wir wollen dies kürzer so ausdrücken, daß wir $f'(x) = y'$ als das Steigungsmaß der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkte A bezeichnen.

§ 36. Wir beweisen jetzt den folgenden, für spätere Untersuchungen notwendigen Hilfssatz: Ist

$$a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \cdots + a_n h^n = \varphi(h)$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades von h ohne konstantes Glied,

so kann man zu jeder gegebenen beliebig kleinen, absoluten Größe $\varkappa_0$ eine absolute Größe η_0 bestimmen derart, daß

$$|\varphi(h)| < \varkappa_0, \quad \text{wenn} \quad |h| < \eta_0$$

genommen wird. In der Tat hat man, wenn $|h| = \eta$ und $|a_\varrho| = \alpha_\varrho$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird, sobald α die größte oder eine der größten unter den n Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ bedeutet,

$$\begin{aligned} |\varphi(h)| &\leqq \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_3\eta^3 + \cdots + \alpha_n\eta^n \\ &\leqq \alpha(\eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots + \eta^n) \\ &< \alpha(\eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots) = \frac{\alpha\eta}{1-\eta}. \end{aligned}$$

Setzt man in diesen letzten Bruch für η den Wert

$$\eta_0 < \frac{\varkappa_0}{\alpha + \varkappa_0} \tag{18}$$

ein, so wird aus dieser Ungleichung die Beziehung entstehen

$$|\varphi(\eta_0)| < \varkappa_0,$$

wie behauptet war.

Man kann daher, wenn in der ganzen Funktion $\varphi(h)$ die Koeffizienten a_ϱ und das Argument h reell sind, den Wert von $\varphi(h)$ durch die Ungleichung

$$-\varkappa_0 < \varphi(h) < +\varkappa_0 \qquad (-\eta_0 < h < +\eta_0)$$

eingrenzen, wobei die reelle Größe $\varkappa_0$ beliebig klein gegeben, und η_0 durch $\varkappa_0$ vermittelst (18) bestimmt ist.

Daraus kann man folgenden weiteren Schluß ziehen. Sind in der ganzen Funktion

$$a_0 + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \cdots + a_nh^n = \psi(h)$$

h und die a_ϱ reell, und ist a_0 von Null verschieden, dann kann man eine Größe η_0 so bestimmen, daß für alle $|\eta| < \eta_0$ das Vorzeichen von $\psi(h)$ mit dem von a_0 übereinstimmt. Dazu reicht es aus, $\varkappa_0 < |a_0|$ zu nehmen.

§ **37.** Versteht man unter dem Symbole

$$\operatorname{sgn} u \quad \text{den Wert} \quad +1,\ 0,\ -1,$$

je nachdem u eine reelle positive, verschwindende oder negative Größe ist, so wird für die Funktion ψ des vorigen Paragraphen

$$\operatorname{sgn}\psi(h) = \operatorname{sgn} a_0, \quad \text{wenn} \quad -\eta_0 < h < +\eta_0$$

ist.[1])

1) „sgn a" sprich „signum a". Das Symbol „sgn", als Abkürzung des Wortes Signum = Zeichen, ist von L. Kronecker eingeführt und verwertet worden (Berl. Ber. 1884, S. 519).

Wir wenden diese Ergebnisse auf die Gleichung

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + f''(x_0)\frac{h}{1\cdot 2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^{n-1}}{n!}$$

an, in der x_0 ein Wert des Argumentes x ist, für den $f'(x_0)$ nicht verschwindet; wir erkennen dann, daß für die Vorzeichen die Relationen

$$\operatorname{sgn}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \operatorname{sgn} f'(x_0),$$

$$\operatorname{sgn}[f(x_0+h)-f(x_0)] = \operatorname{sgn}(h f'(x_0))$$

gelten, wenn h innerhalb eines gewissen Intervalles $(-\eta_0, \cdots, +\eta_0)$ angenommen wird.

Ist $f'(x_0)$ positiv, dann ist bei $h>0$ auch $f(x_0+h)>f(x_0)$ und bei $h<0$ auch $f(x_0+h)<f(x_0)$; d. h. Argument und Funktion ändern sich in gleichem Sinne, oder, wie wir sagen, gleichsinnig.

Ist $f'(x_0)$ negativ, dann ist bei $h>0$ umgekehrt $f(x_0+h)<f(x_0)$, und bei $h<0$ umgekehrt $f(x_0+h)>f(x_0)$; d. h. Argument und Funktion ändern sich hier in ungleichem Sinne, oder, wie wir sagen, ungleichsinnig.

§ 38. Wir behandeln einige Beispiele:

I. Sei

$$y = ax^2 + 2bx + c \qquad (a>0);$$

es folgt

$$y' = 2(ax+b).$$

y' wird also negativ auf der Halbgeraden von $-\infty$ bis $-\frac{b}{a}$ und positiv auf der Halbgeraden von $-\frac{b}{a}$ bis $+\infty$; denn innerhalb $\left(-\infty, \ldots, -\frac{b}{a}\right)$ ist $ax+b$ negativ, und innerhalb $\left(-\frac{b}{a}, \ldots, +\infty\right)$ ist $ax+b$ positiv. Im ersten Intervalle fällt demnach die Kurve, wenn man sie in der Richtung von links nach rechts durchläuft; im zweiten steigt sie. Bemerkenswert ist das Verhalten der Kurve im Punkte, der zu $x=-\frac{b}{a}$ gehört; von da aus steigt sie nach beiden Seiten. Für diesen Punkt ist $y'=0$, das Steigungsmaß der Tangente also 0, d. h. die Tangente verläuft horizontal.

II. Wir betrachten zweitens die Funktion dritten Grades

$$y = x^3 + 3x + 1,$$

bei der sich für die Ableitung

$$y' = 3(x^2+1)$$

ergibt. y' bleibt für alle reellen Werte von x positiv; folglich wächst y überall mit zunehmendem Argumente.

III. Ein drittes Beispiel sei durch

$$y = x^3 - 3x + 1$$

gegeben. Die Ableitung der Funktion wird

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1).$$

Für jeden Punkt x zwischen $-\infty$ und -1 sind beide Klammern der rechten Seite negativ, ihr Produkt ist also positiv; für jeden Punkt x zwischen -1 und $+1$ ist die erste Klammer positiv, dagegen die zweite negativ, ihr Produkt also negativ; für jedes $x > 1$ werden beide Klammern und daher ihr Produkt positiv. Daraus erreicht man die Resultate

zwischen $x = -\infty$ und $x = -1$ steigt die Kurve $y = x^3 - 3x + 1$ bei wachsendem x,
zwischen $x = -1$ und $x = +1$ fällt die Kurve $y = x^3 - 3x + 1$ bei wachsendem x,
zwischen $x = +1$ und $x = +\infty$ steigt die Kurve $y = x^3 - 3x + 1$ bei wachsendem x.

Für die Grenzpunkte dieser drei Intervalle bestimmen wir die zugehörigen Kurvenpunkte und finden

$$(x/y) = (-\infty/-\infty),\ (-1/+3),\ (+1/-1),\ (+\infty/+\infty).$$

Im zweiten Intervalle geht das Steigen der Kurve in Abnehmen, im dritten aus Abnehmen in Steigen über; bei den beiden mittleren verlaufen die zugehörigen Tangenten horizontal. Diese Resultate geben wohl bereits eine klare Anschauung vom Verlaufe der Funktion sowie von deren geometrischem Bilde.

§ 39. Die beiden Beispiele I und III des vorigen Paragraphen haben es uns nahe gelegt, die Punkte zu untersuchen, in denen die Ableitung verschwindet. Dazu führen wir folgende Begriffe ein. Ist für das Argument x_0 der Wert $f(x_0)$ größer als alle Werte $f(x_0 + h)$ für die Umgebung $(x_0 - \eta_0 < x_0 + h < x_0 + \eta_0)$ bei beliebig kleinem aber endlichen η_0, so sagen wir, daß $f(x_0)$ ein Maximum sei; und in ähnlicher Weise definieren wir ein Minimum von $f(x)$ als einen Wert von $f(x)$, der kleiner ist als alle benachbarten einer beliebig kleinen endlichen Umgebung. Maxima und Minima fassen wir unter einen allgemeineren Begriff als Extrema zusammen.

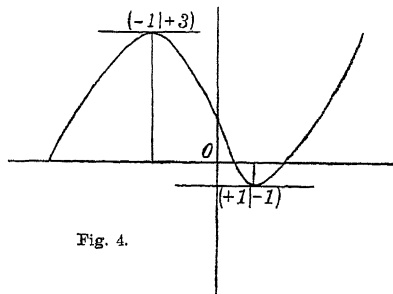



Fig. 4.

Daß das Auftreten eines Extrems $f(x_0)$ das Verschwinden von $f'(x_0)$ zur Folge hat, ist klar; daß aber umgekehrt das Verschwinden von $f'(x_0)$ nicht notwendig ein Extrem $f(x_0)$ zur Folge hat, mag zunächst ein Beispiel zeigen.

Es sei vorgelegt die Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1;$$

dann wird

$$y' = f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2,$$

also verschwindet die Ableitung $f'(x)$ nur für $x = 1$. Dieser Wert $x = 1$ des Argumentes liefert aber

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 3(1+h) + 1 \\ &= h^3 + 2. \end{aligned}$$

Läßt man von h das Intervall $(-\eta_0, \ldots, +\eta_0)$ durchlaufen, so wächst $f(1+h)$ ununterbrochen; es tritt dabei kein Extrem auf.

Die Umkehrung des obigen Satzes über das Auftreten eines Extrems ist also nicht unbedingt zulässig; denn unter den Stellen, an denen $f'(x)$ gleich Null wird, kann es solche geben, zu denen kein Extremum gehört. Die Unterscheidung der verschiedenen möglichen Fälle ist nicht schwer. Es sei $f'(x_0) = 0$; wenn dann x wachsend durch x_0 geht, kann viererlei eintreten:

I. $f'(x)$ ist vor x_0 positiv und nach x_0 positiv; dann wächst $f(x)$ vor x_0 und nach x_0; es tritt kein Extrem ein;

II. $f'(x)$ ist vor x_0 positiv und nach x_0 negativ; dann wächst $f(x)$ vor x_0 und nimmt nach x_0 ab; es tritt in x_0 ein Maximum ein;

III. $f'(x)$ ist vor x_0 negativ und nach x_0 positiv; dann nimmt $f(x)$ vor x_0 ab und wächst nach x_0; es tritt in x_0 ein Minimum ein;

IV. $f'(x)$ ist vor x_0 negativ und nach x_0 negativ; dann nimmt $f(x)$ vor x_0 und nach x_0 ab; es tritt kein Extrem ein.

Man sieht, daß im ersten Falle $f'(x)$ bei x_0 ein Minimum hat; und im vierten Falle bei x_0 ein Maximum. In allen vier Fällen ist die Tangente in (x_0/y_0) parallel der X-Achse; im ersten und im vierten Falle schneidet die Tangente die Kurve; im zweiten verläuft die Kurve unterhalb und im dritten oberhalb der Tangente bei hinreichend kleinen Werten von h. Da nach einem Maximum die Funktion fällt und vor einem Maximum steigt, so können zwei Maxima nicht unmittelbar aufeinander folgen; das gleiche gilt für zwei Minima; es können also nur ungleichartige Extreme unmittelbar aufeinander folgen.

§ 40. Für die Berechnung der Extreme einer Funktion wählen wir noch das folgende, etwas verwickelte Beispiel. Es sei bei ganzzahligen Exponenten α und β die Funktion vorgelegt

$$f(x) = y = (a-x)^\alpha (b-x)^\beta \qquad (a < b; \alpha > 1, \beta > 1).$$

Nach dem Voraufgehenden muß jedes x, dem ein Extrem zugehört, die Gleichung

$$f'(x) = y' = (a - x)^{\alpha - 1}(b - x)^{\beta - 1}[(\alpha + \beta)x - (\alpha b + \beta a)] = 0$$

erfüllen. Es können also bei der Aufsuchung eines Extrems nur drei Werte für x, nämlich

$$x_1 = a; \quad x_2 = b; \quad x_3 = \frac{\alpha b + \beta a}{\alpha + \beta}$$

in Frage kommen. In der Tat macht $x_1 = a$ den Faktor $(a - x)^{\alpha - 1}$ zu Null, da $\alpha > 1$ ist, usw. Nun sieht man, daß die beiden Differenzen

$$x_3 - a = \frac{\alpha(b - a)}{\alpha + \beta}, \quad b - x_3 = \frac{\beta(b - a)}{\alpha + \beta}$$

positiv sind, so daß

$$a < x_3 < b$$

wird, x_3 daher zwischen a und b liegt. Es kann also höchstens ein Extrem im Intervalle $(a, \ldots, c)$ geben.

Ferner findet man

$$f(x_3) = (-1)^\alpha \alpha^\alpha \beta^\beta \left(\frac{b - a}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha + \beta};$$

folglich wird $f(x_3) \neq 0$ und

$$\operatorname{sgn} f(x_3) = \operatorname{sgn} (-1)^\alpha.$$

Da $f(a) = 0$ und auch $f(b) = 0$ ist, während $f(x_3) \neq 0$ wird, so nimmt $f(x)$ zwischen a und b mindestens einen extremen Wert an, und da $f(x)$ nach der eben gemachten Bemerkung höchstens einen solchen annehmen kann, so tritt im Innern von $(a, \ldots, b)$ wirklich einer bei x_3 und nur dieser eine auf. Ist α gerade, also $\operatorname{sgn} f(x_3) = +$, dann ist dies ein Maximum, bei ungeradem α dagegen ein Minimum.

Um den Verlauf der Funktion $f(x)$ in der Umgebung des Punktes $(x/y) = (a/0)$ zu untersuchen, bestimmen wir für ein kleines positives h den Funktionalwert

$$f(a - h) = h^\alpha (b - a + h)^h$$

und ersehen daraus, daß $f(x)$ links von $x = a$ im Positiven verläuft, während aus

$$f(a + h) = (-1)^\alpha h^\alpha (b - a - h)^\beta$$

folgt, daß bei geradem α auch rechts von $x = a$ die Funktion $f(x)$ positiv ist, also bei $x = a$ ein Minimum hat, und daß bei ungeradem α rechts von $x = a$ die Funktion $f(x)$ negativ ist, also bei $x = a$ kein Extrem hat, sondern durch Null geht.

Für $x = b$ bestimmen wir, um den Verlauf der Funktion in der Umgebung von $(b/0)$ zu studieren,

$$f(b-h) = (-1)^{\alpha}(b-a-h)^{\alpha}h^{\beta},$$
$$f(b+h) = (-1)^{\alpha}(b-a+h)^{\alpha}(-h)^{\beta}.$$

$f(b)$ ist dann und nur dann ein Extrem, wenn beide Werte gleiches Vorzeichen haben, d. h. wenn β gerade ist; für ein gerades α ist dies

α gerade; β gerade — α gerade; β ungerade

α ungerade; β gerade — α ungerade; β ungerade

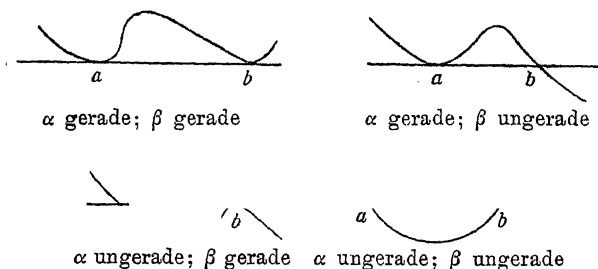



Fig. 5.

Extrem ein Minimum, für ein ungerades α ein Maximum. Bei ungeradem β geht die Funktion durch Null.

Somit hat man in geometrischer Darstellung beistehende vier Bilder für unsere Funktion

$$y = (a-x)^{\alpha}(b-x)^{\beta}.$$

Drittes Kapitel.

Elementareigenschaften ganzer Funktionen einer Variablen.

§ 41. Jede ganze Funktion n^{ten} Grades der Variablen x kann auf die Form gebracht werden (vgl. § 17)

$$(1) \qquad y = f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n;$$

in ihr treten $(n+1)$ Konstanten auf, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, und diese können dazu benutzt werden, $(n+1)$ an die Funktion gestellte Forderungen zu befriedigen. Die Natur dieser Forderungen darf verschiedenartig sein; besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse, wenn vorgeschrieben wird, daß für die $(n+1)$ untereinander verschiedenen willkürlichen Werte

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$$

des Argumentes x die Funktion $y = f(x)$ die $(n+1)$ vorgeschriebenen gleichen oder ungleichen Werte

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}, y_n$$

annehme. Das hierdurch gestellte Problem wird durch die Lagrangesche Interpolationsformel[1])

$$(2)\quad \begin{aligned} y = f(x) = {} & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots(x_0-x_n)} \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} \\ & + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} \\ & + \cdots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

gelöst. In der Tat, setzen wir $x = x_0$, so verschwinden alle Summanden der rechten Seite mit Ausnahme des ersten, der den Wert y_0 annimmt; und ähnlich weiter.

Die Formel (2) kann noch kompendiöser geschrieben werden. Wir setzen für das Produkt

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n) = \varphi(x),$$

dann wird die Ableitung dieser Funktion nach § 33, Formel (12)

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = {} & (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) + (x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}); \end{aligned}$$

also folgt

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0) &= (x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n), \\ \varphi'(x_1) &= (x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n), \\ & \\ \varphi'(x_n) &= (x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Dadurch geht (2) über in die Form

$$(3)\quad \begin{aligned} y = f(x) = \varphi(x) \Big[& y_0 \frac{1}{\varphi'(x_0)(x-x_0)} + y_1 \frac{1}{\varphi'(x_1)(x-x_1)} \\ & + y_2 \frac{1}{\varphi'(x_2)(x-x_2)} + \cdots \Big] = \varphi(x) \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{y_\lambda}{\varphi'(x_\lambda)(x-x_\lambda)}. \end{aligned}$$

1) Lagrange, Journ. Ecole-polytech., cah. 3 (1812), Oeuvres 7, p. 285. — Eine andere Lösung des Problems liefert die Newtonsche Interpolationsformel, Princ. phil. nat. 1723, liber III, lemma 8.

§ **42.** Die Formeln (2) oder (3) liefern eine Lösung der gestellten Aufgabe; aber es fragt sich, ob dies die einzige ist, oder ob noch eine andere ganze Funktion n^{ten} Grades $g(x)$ die gestellten Bedingungen befriedigt; mit anderen Worten, ob die Differenz zweier ganzen Funktionen n^{ten} Grades

$$k(x) = f(x) - g(x)$$

für $(n+1)$ Werte des Argumentes

$$x = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \qquad (x_\alpha \neq x_\beta)$$

verschwinden kann, ohne identisch gleich Null zu werden. Gesetzt, man hätte

$$k(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1} x + c_n,$$

worin nicht alle c gleich Null sind, so wäre der Annahme nach

$$k(x_0) = 0, \quad k(x_1) = 0, \quad k(x_2) = 0, \quad \ldots, \quad k(x_n) = 0.$$

Daraus folgt zunächst, wegen der ersten dieser $(n+1)$ Gleichungen, daß man schreiben kann

$$\begin{aligned} k(x) = k(x) - k(x_0) &= c_0(x^n - x_0^{\,n}) + c_1(x^{n-1} - x_0^{\,n-1}) + \cdots c_{n-1}(x - x_0) \\ &= (x - x_0)[c_0(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{\,n-1}) + \cdots + c_{n-2}(x + x_0) \\ &\qquad + c_{n-1}] = (x - x_0)\cdot k_1(x), \end{aligned}$$

wobei der Abkürzung halber die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x, die in die rechtsseitige Entwicklung eingeht,

$$\begin{aligned} c_0 x^{n-1} + (c_1 + c_0 x_0) x^{n-2} + (c_2 + c_1 x_0 + c_0 x_0^{\,2}) x^{n-3} + \cdots \\ + (c_{n-1} + c_{n-2} x_0 + \cdots + c_0 x_0^{\,n-1}) = k_1(x) \end{aligned}$$

gesetzt ist. Weiter gilt demnach wegen $k(x_1) = 0$ die Gleichung

$$k(x_1) = 0 = (x_1 - x_0) k_1(x_1),$$

und da $(x_1 - x_0) \neq 0$ ist, so muß die Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$k_1(x_1) = 0$$

werden.

Dieselben Schlüsse zeigen daher, daß $k_1(x)$ den Faktor $(x - x_1)$ besitzt, so daß gesetzt werden kann

$$k(x) = (x - x_0)(x - x_1) k_2(x),$$

wobei $k_2(x)$ eine ganze Funktion des x von der Gestalt

$$k_2(x) = d_0 x^{n-2} + d_1 x^{n-3} + \cdots + d_{n-3} x^1 + d_{n-2}$$

bedeutet. Fährt man in gleicher Weise fort, so gelangt man auf die Darstellung

$$k(x) = c_0(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \tag{4}$$

Hier soll nun auch für den letzten noch ausstehenden Wert x_n des Argumentes x

$$k(x_n) \equiv c_0(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) = 0$$

werden. Da die einzelnen Klammergrößen von Null verschieden sind, und da ein Produkt nur verschwindet, wenn einer seiner Faktoren Null ist, so muß $c_0 = 0$, also wegen (4) $k(x)$ identisch Null sein.

So sehen wir: Zwei ganze Funktionen n^{ten} Grades einer Variablen, deren Werte für $(n+1)$ untereinander verschiedene Argumentwerte übereinstimmen, sind einander identisch gleich. Gleichzeitig ergibt sich: Eine ganze Funktion n^{ten} Grades einer Unbekannten kann höchstens für n Werte derselben verschwinden, falls sie nicht identisch Null ist; verschwindet sie für die Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ von x, so kann die Funktion in die Normalform

$$c_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$$

gebracht werden.

§ 43. Die Addition und die Subtraktion zweier ganzer Funktionen einer Variablen

$$(5) \qquad \begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \\ \varphi(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_\nu x^\nu \end{aligned}$$

vollzieht sich in der Form

$$f(x) \pm \varphi(x) = (a_0 \pm \alpha_0) + (a_1 \pm \alpha_1)x + (a_2 \pm \alpha_2)x^2 + \cdots.$$

Ist $n \neq \nu$, so gibt die größere der beiden Gradzahlen n und ν den Grad der Summe oder der Differenz an; ist $n = \nu$, so kann dieser Grad kleiner als n oder ν werden. Dies tritt z. B. ein bei $a_n \pm \alpha_n = 0$.

Die Multiplikation $f \cdot \varphi$ wird nach der Regel über die Produktbildung zweier Summen vollzogen. Man hat

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \varphi(x) = a_0\alpha_0 &+ a_0\alpha_1 x + a_0\alpha_2 x^2 + a_0\alpha_3 x^3 + \cdots \\ &+ a_1\alpha_0 x + a_1\alpha_1 x^2 + a_1\alpha_2 x^3 + a_1\alpha_3 x^4 + \cdots \\ &+ a_2\alpha_0 x^2 + a_2\alpha_1 x^3 + a_2\alpha_2 x^4 + a_2\alpha_3 x^5 + \cdots \end{aligned}$$

oder nach steigenden Potenzen von x geordnet

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \varphi(x) = a_0\alpha_0 + (a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0)x + (a_0\alpha_2 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_0)x^2 + \cdots \\ + (a_{n-1}\alpha_\nu + a_n\alpha_{\nu-1})x^{n+\nu-1} + a_n\alpha_\nu x^{n+\nu}. \end{aligned}$$

Der Grad des Produktes ist demnach gleich der Summe der Grade der Faktoren.

Während die Summen- sowie die Produktbildung bei ganzen Funktionen stets in dem Bereiche ganzer Funktionen ausführbar ist, findet dies bei der Quotientenbildung nicht mehr allgemein statt, d. h. wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ beliebige ganze Funktionen sind, so gibt es im allgemeinen keine ganze Funktion $q(x)$ von x, die die Gleichung

$$f(x) = \varphi(x) \cdot q(x)$$

befriedigte. Dagegen kann man stets auf eine und auch nur auf eine Weise eine ganze Funktion

$$r(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots + r_{\nu-1} x^{\nu-1}$$

derart bestimmen, daß (unter Weglassung der Argumentangabe in den folgenden Formeln) der Quotient

$$\frac{f-r}{\varphi}$$

eine ganze Funktion $q(x)$ wird; daß man also hat

$$f = \varphi \cdot q + r. \tag{6}$$

Um dies nachzuweisen, nehmen wir zunächst $n \geqq \nu$ und bilden eine Funktion f_1 gemäß der Gleichung

$$f - \frac{a_n}{\alpha_\nu} x^{n-\nu} \cdot \varphi = f_1;$$

dann ist f_1 höchstens vom Grade $(n-1)$; wir bezeichnen diesen Grad mit m und setzen

$$f_1 = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 \qquad (m \leqq n-1).$$

Dann bilden wir eine Funktion $f_2(x)$ gemäß der Gleichung

$$f_1 - \frac{b_m}{\alpha_\nu} x^{m-\nu} \cdot \varphi = f_2,$$

dessen Grad in x gleich oder kleiner als $(n-2)$ wird. So fahren wir fort, bis wir zu einer Funktion

$$f_\varrho - \frac{e_h}{\alpha_\nu} x^{h-\nu} \cdot \varphi = f_{\varrho+1}$$

kommen, deren Grad $< \nu$ ist, während der von f_ϱ noch $\geqq \nu$ war. Die Summe der entsprechenden Gleichungen

$$f = \frac{a_n x^{n-\nu} + b_m x^{m-\nu} + \cdots + e_h x^{h-\nu}}{\alpha_n} \cdot \varphi + f_{\varrho+1}$$

beweist den ausgesprochenen, in (6) formulierten Satz, wenn man den Zähler des Bruches $= \alpha_\nu q$ und $f_{\varrho+1} = r$ setzt.

Ist ferner $n < \nu$, so braucht man nur $q = a_n : \alpha_\nu$ zu nehmen und kommt dann auf den eben besprochenen Fall zurück.

Die Darstellung (6) ist nur auf eine Art möglich. Denn aus der Annahme des Bestehens einer Gleichung

$$f = \varphi \cdot q + r = \varphi \cdot q_1 + r_1 \qquad (q_1 \neq q)$$

würde folgen

$$\varphi \cdot [q - q_1] = r_1 - r,$$

wobei die Klammer nicht identisch verschwindet, q_1 also mindestens ein von Null verschiedenes Glied, etwa

$$kx^{\varkappa} \qquad (k \gtreqless 0)$$

besitzt. Dann ist wegen (5), § 43 die linke Seite der letzten Gleichung vom Grade $\nu + \varkappa$, daher von höherem als φ, d. h. $\geqq \nu$, die rechte hingegen höchstens vom Grade $(\nu - 2)$; was nicht angeht.

In (6) heißt q der Quotient und r der Rest der Division von f durch φ. Ist $r \equiv 0$, dann heißt φ ein Teiler von f, und f wird ein Vielfaches von φ.

§ 44. Es seien nun zwei ganze Funktionen, f vom Grade n und f_1 vom Grade n_1, gegeben, und dabei $n \geqq n_1$. Dann läßt sich das Euklidsche Verfahren (vgl. Grundlehren I, I, S. 53) für die Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Zahlen unverändert auf unsere beiden Funktionen übertragen. Wir bilden nämlich durch Division nach dem Verfahren des vorigen Paragraphen

$$f = q_1 \cdot f_1 + f_2,$$

wobei q_1 und f_2 zwei ganze Funktionen von x sind, und der Grad n_2 des Restes bei der Division von f durch f_1 sich kleiner als n_1 ausweist. In gleicher Weise gelangt man von f_1 und f_2 durch Division zu

$$f_1 = q_2 f_2 + f_3,$$

wo der Grad n_3 von f_3 kleiner als n_2 ist, also

$$n_3 \leqq n_2 - 1 \leqq n_1 - 2$$

wird. Geht man so weiter, dann muß wegen der Verminderung der Grade das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Operationen abbrechen; und so kommt man zu dem Schema

$$\left\{\begin{aligned} f &= q_1 \cdot f_1 + f_2, \\ f_1 &= q_2 \cdot f_2 + f_3, \\ f_2 &= q_3 \cdot f_3 + f_4, \\ &\cdot \\ f_{r-3} &= q_{r-2} \cdot f_{r-2} + f_{r-1}, \\ f_{r-2} &= q_{r-1} \cdot f_{r-1} + f_r, \\ f_{r-1} &= q_r \cdot f_r. \end{aligned}\right.$$

Die letzte der Gleichungen (7), in der f_r auch eine Konstante sein kann, zeigt, daß f_{r-1} ein Vielfaches von f_r ist; die vorletzte zeigt dann, da beide Summanden der rechten Seite f_r als Faktor haben, daß also f_{r-2} ein Vielfaches von f_r ist, usf., bis schließlich folgt, daß f_1 und f Vielfache von f_r sind. Es gelten daher die beiden Gleichungen

$$(8)\qquad f = Q \cdot f_r \quad \text{und} \quad f_1 = Q_1 \cdot f_r.$$

f_r ist also ein gemeinsamer Teiler von f und f_1.

Die vorletzte der Gleichungen (7) gibt

$$f_r = -f_{r-1} \cdot q_{r-1} + f_{r-2};$$

diese geht durch die drittletzte der Gleichungen (7) über in

$$f_r = -(-f_{r-2} \cdot q_{r-2} + f_{r-3}) \cdot q_{r-1} + f_{r-2}$$

oder kürzer geschrieben in

$$f_r = G' \cdot f_{r-2} + H' \cdot f_{r-3}\ ^{1)};$$

diese durch die vorhergehende aus (7) in eine Gleichung von der Form

$$f_r = G'' \cdot f_{r-3} + H'' \cdot f_{r-4}$$

usf., bis man zu der Schlußgleichung

$$(9)\qquad f_r = G' \cdot f_1 + H' \cdot f$$

gelangt. Ihr zufolge teilt der größte gemeinsame Teiler von f und f_1 auch f_r; wegen (8) ist daher f_r der größte gemeinsame Teiler von f und f_1. Die Gleichung (9) zeigt: der größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Funktionen ist als lineare, homogene Funktion derselben darstellbar. Sind insbesondere f und f_1 teilerfremd zueinander, dann wird f_r eine von Null verschiedene Konstante. Dividiert man mit dieser in beide Seiten von (9), so entsteht die Relation

$$(9\text{a})\qquad 1 = Gf_1 + Hf,$$

worin G und H ganze Funktionen von x sind, die nicht ganzzahlige Koeffizienten zu haben brauchen.

Die Funktionen G und H sind durch (9) nur bis auf Vielfache von f, bzw. von f_1 bestimmt, da auch für eine beliebige ganze Funktion R von x

$$(G + f \cdot R)f_1 + (H - f_1 R)f = f_r$$

ist. Um zu einer eindeutigen Darstellung von f_r durch f und f_1 zu gelangen, verfahren wir so: Wir dividieren H durch f_1 und benennen

1) Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß G', H' nicht die Ableitungen von G, H sind.

den Quotienten R, dann wird $(H - f_1 R)$ höchstens vom Grade $(n_1 - 1)$. Daraus folgt, daß $f_r - (H - f_1 R) f$ höchstens vom Grade $(n + n_1 - 1)$, also nach (6) $(G + fR)$ höchstens vom Grade $(n - 1)$ ist. Demnach kann man in (9) die Funktionen H und G so wählen, daß ihre Grade die Werte $(n - 1)$ bzw. $(n_1 - 1)$ nicht übersteigen, und dies ist nur auf eine Art möglich.

§ **45.** Wir wollen für das Besprochene zwei Beispiele geben.

I. Es sei

$$f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 6, \quad f_1(x) = x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 9x + 9.$$

Dafür wird

$$q_1 = 1, \qquad f_2(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3,$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \qquad f_3(x) = \frac{11}{4}x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{33}{4},$$

$$= \frac{}{11}x - \frac{}{11}, \qquad f_4(x) = 0.$$

Daher wird f_3 oder, um die Koeffizienten ganzzahlig zu machen, nach (9)

$$\varphi_3(x) = \frac{4}{11} f_3(x) = x^2 - 2x + 3$$

der größte gemeinsame Teiler von f und f_1. Dieser Teiler ist

$$x^2 - 2x + 3 \qquad \frac{\cdot\, 2x + 1}{11} f(x) + \frac{2x + 3}{11} f_1(x)$$

und es wird dabei

$$f(x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + x + 2), \quad f_1(x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - x + 3).$$

II. Es seien zweitens die Funktionen vorgelegt

$$f(x) = x^3 + 1, \quad f_1(x) = x^2 + 2x + 3;$$

wir erhalten für sie

$$q_1 = x - 2, \quad f_2(x) = x + 7,$$

$$q_2 = x - 5, \quad f_3(x) = 38,$$

$$(-x + 5)(x^3 + 1) + (x^2 - 7x + 11)(x^2 + 2x + 3) = 38.$$

Demnach sind unsere Funktionen f und f_1 teilerfremd. Nimmt man hier z. B. $R = 1$, so folgt, daß auch

$$(x^2 + x + 8)(x^3 + 1) + (-x^3 + x^2 - 7x + 10)(x^2 + 2x + 3) = 38.$$

§ **46.** Dem größten gemeinsamen Teiler f_r der beiden Funktionen f und f_1 tritt zur Seite ihr kleinstes gemeinsames Vielfache g. Aus dem Begriffe folgt, daß man setzen kann

$$g = f \cdot g_1 = f_1 \cdot g_2,$$

worin g_1 und g_2 zwei ganze Funktionen von x ohne gemeinsamen Teiler sind. Da nach (8)

$$f = Q \cdot f_r, \quad f_1 = Q_1 f_r,$$

so folgt

$$g = Q f_r \cdot g_1 = Q_1 f_r g_2,$$
$$Q \cdot g_1 = Q_1 \cdot g_2,$$

und da Q und Q_1 sowie g_1 und g_2 teilerfremd sind,

$$g_1 = Q_1, \quad g_2 = Q,$$
$$g = f \cdot Q_1 = f \cdot \frac{Q_1 f_r}{f_r} = \frac{f \cdot f_1}{f_r},$$
$$g \cdot f_r = f \cdot f_1,$$

d. h. das Produkt aus dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier Funktionen ist gleich dem Produkte dieser beiden Funktionen selbst.

So ist für das erste Beispiel des vorigen Paragraphen das kleinste gemeinsame Vielfache von f und f_1

$$g = (x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 6)(x^2 - x + 3) = (x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 9x + 9)(x^2 + x + 2)$$
$$= x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 9x + 18;$$

und für das zweite Beispiel des gleichen Paragraphen

$$g = (x^3 + 1)(x^2 + 2x + 3) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 3.$$

§ 47. Wenn f und f_1 teilerfremd sind, kann man (9) in die Form bringen

$$H_1 \cdot f + H \cdot f_1 = 1, \tag{9a}$$

worin H und H_1 ganze Funktionen höchstens vom Grade $(n - 1)$ bzw. $(n_1 - 1)$ mit im allgemeinen gebrochenen Koeffizienten sind. Dabei ergibt sich aus (9a) durch Division mit $f \cdot f_1$

$$\frac{1}{f \cdot f_1} = \frac{H}{f} + \frac{H_1}{f_1},$$

und wenn k eine ganze Funktion bedeutet, deren Grad $< (n + n_1)$ ist, durch Multiplikation mit dieser Funktion k in die letzte Gleichung

$$\frac{k}{f \cdot f_1} = \frac{H \cdot k}{f} + \frac{H_1 \cdot k}{f_1}.$$

Setzt man nun, indem man Hk durch f sowie $H_1 k$ durch f_1 dividiert,

$$Hk = Q \cdot f + K, \quad H_1 k = Q_1 \cdot f_1 + K_1,$$

wo K und K_1 ganze Funktionen von geringerem als dem n^{ten} bzw.

dem n_1^{ten} Grade sein sollen, so folgt die Umgestaltung der obigen Gleichung in die Form

$$Q + Q_1 = \frac{k}{f \cdot f_1} - \frac{K}{f} - \frac{K_1}{f_1}.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die ganze Funktion $Q + Q_1$ Null ist; das erkennt man, wenn man beide Seiten der letzten Gleichung mit $f \cdot f_1$ multipliziert und den Grad der rechten Seite mit dem der linken vergleicht. Die linke hat, falls $Q + Q_1 \neq 0$ ist, zum Grade mindestens $(n + n_1)$, während die rechten höchstens $(n + n_1 - 1)$ hat. Somit folgt

$$\frac{k}{f \cdot f_1} = \frac{K}{f} + \frac{K_1}{f_1}; \tag{10}$$

und hierdurch haben wir den Bruch auf der linken Seite in eine Summe einfacherer, sogenannter Partialbrüche zerlegt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man zu der Zerlegung

$$\frac{k}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n} f_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{K_\lambda}{f_\lambda},$$

wenn kein gemeinsamer Teiler für irgend zwei f_λ besteht, und wenn der Grad von k geringer ist als der von $\prod\limits_{1}^{n} f_\lambda$.

Es wird bald gezeigt werden (§ 50), daß jede ganze Funktion $F(x)$ sich, abgesehen von konstanten Faktoren, auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt unzerlegbarer Faktoren

$$F = f_1^{\varkappa_1} f_2^{\varkappa_2} \cdots f_\varrho^{\varkappa_\varrho}$$

zerfällt werden kann, wo die $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\varrho$ positive ganze Zahlen sind. Hat die ganze Funktion $G(x)$ einen geringeren Grad als F, dann zeigen die vorstehenden Entwicklungen, daß die Darstellung

$$\frac{G}{F} = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \frac{K_\alpha}{f_\alpha^{\varkappa_\alpha}} \tag{11}$$

möglich ist, wobei auf der rechten Seite der Grad jedes Zählers kleiner bleibt als der des entsprechenden Nenners. Gleichzeitig kann man annehmen, daß $G(x)$ zu $F(x)$ teilerfremd sei, da man dies ja durch Heben des Bruches stets erreichen kann.

Ist auch nur einer der Exponenten $\varkappa$ größer als 1, so ist eine noch weitere Vereinfachung des zugehörigen Bruches möglich. Wir lassen der bequemeren Schreibweise halber die unteren Indizes und

die Argumente fort und bilden durch fortgesetzte Divisionen von $g, q', q'', q''', \ldots$ durch f die Gleichungsreihe

$$g = q'f + g', \quad q' = q''f + g'', \quad q'' = q'''f + g''', \quad \cdots,$$

so daß

$$g = g' + g''f + g'''f^2 + \cdots + g^{(\varkappa+1)}f^{\varkappa};$$

hier werden die Grade aller $g', g'', g''', \ldots$ kleiner als der Grad von f, und man erhält

$$(12) \qquad \frac{g}{f^{\varkappa}} = \frac{g'}{f^{\varkappa}} + \frac{y}{f^{\varkappa-1}} + \frac{y}{f^{\varkappa-2}} + \cdots + \frac{g^{(\varkappa)}}{f^1}$$

In dem besonderen Falle, daß f eine lineare Funktion von x wird, treten $g', g'', g''', \ldots$ als Konstanten auf. So kommt man zu der Formel für die Partialbruchzerlegung, in der die $c_{\varkappa\lambda}$ Konstanten bedeuten

$$(12\text{a}) \begin{cases} \dfrac{G(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots} = \dfrac{c_{a,1}}{(x-a)^{\alpha}} + \dfrac{c_{a,2}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \dfrac{a,\alpha}{x-a} \\ \qquad\qquad + \dfrac{c_{b,1}}{(x-b)^{\beta}} + \dfrac{c_{b,2}}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \dfrac{c_{b,\beta}}{x-} \quad (a \neq b \neq \cdots). \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Wir werden bald beweisen, daß eine derartige Zerlegung nur auf eine Art möglich ist, vgl. § 55.

Als Beispiel behandeln wir den Bruch

$$\frac{G(x)}{F(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 6}{(x^2+1)(x-1)^2}.$$

Man findet bei der Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers der Faktoren im Nenner, nämlich (x^2+1) und $(x-1)^2$,

$$x(x^2 - 2x + 1) - (x-2)(x^2+1) = 2,$$

also

$$\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} \quad \frac{\frac{1}{2}(x-2)}{(x-1)^2} - \frac{}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

und daraus

$$\frac{\frac{1}{2}x(x^3+2x^2+3x+6)}{x^2+1} - \frac{\frac{1}{2}(x-2)(x^3+2x^2+3x+}{(x-1)^2} \quad \frac{x^3+2x^2+3x+6}{(x^2+1)(x-1)^2},$$

oder

$$\left[x^2 + 2x + 2 + \frac{2x-1}{x^2+1}\right] - \left[x^2 + 2x + 2 + \frac{x-7}{(x-1)^2}\right] = \frac{2x-1}{x^2+1} - \frac{x-7}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 6}{(x^2+1)(x-1)^2};$$

setzt man $x-7=-6+(x-1)$, so kommt man auf das Schlußresultat in der Form

$$\frac{x^3+2x^2+3x+6}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{2x-1}{x^2+1}+\frac{6}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

Im Bereiche der komplexen Größen ist der erste Bruch rechts noch weiter zerlegbar; man hat für ihn

$$\frac{2x-1}{x^2+1}=\frac{1+\frac{1}{2}i}{x-i}+\frac{1-\frac{1}{2}i}{x+i}.$$

§ 48. Es sei $f(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion n^{ten} Grades der Variablen x. Gibt es außer konstanten Größen keine Funktion von geringerem Grade als dem n^{ten} mit ganzzahligen Koeffizienten, die $f(x)$ teilt, dann heißt $f(x)$ irreduktibel; gibt es eine solche, dann heißt $f(x)$ reduktibel; doch soll die Teilbarkeit durch eine ganze Zahl die Reduktibilität nicht zur Folge haben, die teilende Funktion soll also mindestens den Grad 1 besitzen.

Ist eine Funktion $f(x)$ des Grades $n=2\varkappa$ oder $n=2\varkappa+1$ reduktibel, so hat sie auch einen Teiler, dessen Grad den Wert $\varkappa$ nicht übertrifft. Will man nun diese Funktion $f(x)$ auf ihre Reduktibilität hin untersuchen, so reicht es aus nachzusehen, ob sie einen Teiler eines Grades $\leqq\varkappa$ hat. Hat die Funktion f keinen solchen, so ist $f(x)$ irreduktibel. Gesetzt aber, sie habe einen solchen $g(x)$, so daß

$$f(x)=g(x)\cdot h(x)$$

wird, wo $g(x)$ und $h(x)$ ganzzahlige Koeffizienten haben, dann wird für jeden ganzzahligen Wert x_0 von x der Zahlenwert $g(x_0)$ ein Teiler des Zahlenwertes $f(x_0)$. Da wir die sämtlichen Teiler der bekannten ganzen Zahl $f(x_0)$ durch eine endliche Anzahl von Versuchen bestimmen können, so haben wir unter diesen Teilern auch $g(x_0)$ zu suchen, d. h. für den Wert $g(x_0)$ steht nur eine endliche Zahl von Möglichkeiten zur Wahl.

Genau das gleiche findet mit den willkürlichen, nur untereinander und von x_0 verschiedenen ganzzahligen Argumentwerten $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ von x statt, da ja $g(x_\alpha)$ ein Teiler von $f(x_\alpha)$ ist $(\alpha=1,2,\ldots,\varkappa)$.

Wir haben also für die möglicherweise vorhandene Funktion $g(x)$ eine endliche Anzahl von Wertesystemen $g(x_0), g(x_1), \ldots, g(x_\varkappa)$ für die beliebigen Argumente $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$. Nach der Lagrangeschen Interpolationsformel kann man für jedes dieser Wertsysteme eine Funktion herstellen

$$g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x),\ \ldots.$$

Ist ein Teiler $g(x)$ von $f(x)$ vorhanden, so kommt er sicher unter diesen Funktionen vor. Man braucht also nur der Reihe nach die

Division von $f(x)$ durch die Funktionen $g_1, g_2, \ldots$ der obigen Reihe vorzunehmen, um eine Entscheidung über die Reduktibilität oder die Irreduktibilität von $f(x)$ herbeizuführen.

Als Beispiel behandeln wir die ganze Funktion vierten Grades

$$f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 8x + 1 \qquad (\varkappa = 2).$$

Es ist dafür, wenn $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ genommen wird,

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = -3.$$

Hier stellt sich die Zerlegung besonders einfach, da man mit Primzahlen zu tun hat. Man erhält nämlich nur je vier Faktoren der Werte von $f(1)$ und $f(2)$, und nur zwei Faktoren von $f(0)$

$$g(0) = \pm 1, \quad g(1) = \pm 1, \pm 2, \quad g(2) = \pm 1, \pm 3.$$

Das ergibt 32 Wertkombinationen; da wir aber statt $+g(x)$ ebensogut $-g(x)$ als Teiler von $f(x)$ auffassen können, so dürfen wir $g(0) = -1$ annehmen, und es bleiben nur 16 Kombinationen zu behandeln. Nach der Interpolationsformel von Lagrange ist

$$g(x) = g(0)\left(+\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) + g(1)(-x^2 + 2x) + g(2)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right).$$

Danach ergibt sich folgende Tabelle

$g(1) =$	$g(2) =$	$g(x) =$	$g(1) =$	$g(2) =$	$g(x) =$
$+1$	$+1$	$-x^2 + 3x - 1$	$+1$	$+3$	$2x - 1$
$+1$	-1	$-2x^2 + 4x - 1$	$+1$	-3	$-3x^2 + 5x - 1$
-1	$+1$	$+x^2 - x - 1$	-1	$+3$	$2x^2 - 2x - 1$
-1	-1	$-x^2 + 3x - 1$	-1	-3	$-x^2 + x - 1$
$+2$	$+1$	$-2x^2 + 5x - 1$	$+2$	$+3$	$-x^2 + 4x - 1$
$+2$	-1	$-3x^2 + 6x - 1$	$+2$	-3	$-4x^2 + 7x - 1$
-2	$+1$	$+2x^2 - 3x - 1$	-2	$+3$	$3x^2 - 4x - 1$
-2	-1	$x^2 - 2x - 1$	-2	-3	$-x - 1$

und jetzt bleibt uns nur noch übrig nachzusehen, ob eine der Funktionen $g(x)$ in $f(x)$ aufgeht.

Statt aber die 16 Divisionen durchzuführen, wendet man bequemer die eben befolgte Methode noch für einen neuen Argumentwert an. Es sei $x = -2$, also $f(-2) = 221 = 17 \cdot 13$. Da die 16 Werte von $g(-2)$ der Reihe nach gleich

$$-9, -17, 5, -11, -19, -25, 13, 7, -5, -23, 11, -7,$$
$$-13, -31, +19, +1$$

sind, und da der Quotient $f(-2):g(-2)$ eine ganze Zahl sein muß, so kommen nur noch vier Formen in Betracht, nämlich

$$-2x^2+4x-1, \quad 2x^2-3x-1, \quad -x^2+4x-1, \quad -x-1,$$

und man findet durch Division, daß die zweite und die vierte Funktion ausscheiden, und daß

$$f(x)=2x^4-12x^3+19x^2-8x+1=(2x^2-4x+1)(x^2-4x+1)$$

ist; zugleich folgt, daß die beiden quadratischen Faktoren der rechten Seite unzerlegbar sind.

§ 49. Als zweites Beispiel für die Irreduktibilitätsverhältnisse untersuchen wir die Zerlegung einer Funktion

$$f(x)=x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x+a_k,$$

in der alle Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ ganze Zahlen und durch eine und dieselbe Primzahl p teilbar sein sollen.

Angenommen, es sei die ganzzahlige Funktion

$$g(x)=x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_{m-1}x+b_m \qquad (m\leqq k-1)$$

ein Teiler von $f(x)$, und der Quotient $f(x):g(x)$ gleich der ganzzahligen Funktion

$$h(x)=x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}x+c_n \qquad (m+n=k),$$

so muß $b_m\cdot c_n=a_k$ durch p teilbar sein. Wir untersuchen, ob einer der beiden Faktoren b_m und c_n, etwa b_m, teilerfremd zu p sein kann. Aus $b_m\cdot c_n=a_k$ folgt, daß dann p ein Teiler von c_n ist; aus

$$b_{m-1}c_n+b_mc_{n-1}=a_{k-1}$$

folgt weiter, daß c_{n-1} durch p teilbar ist; aus

$$b_{m-2}c_n+b_{m-1}c_{n-1}+b_mc_{n-2}=a_{k-2},$$

daß auch c_{n-2} es ist, usf., bis zu

$$b_{m-n}c_n+b_{m-n+1}c_{n-1}+\cdots+b_{m-1}c_1+b_m=a_{k-n},$$

wo die b, deren Indizes negativ werden, gleich Null zu setzen sind. Aus dieser Gleichung würde aber folgen, daß b_m durch p teilbar ist, was der Annahme widerspricht.

Die Annahme, daß c_n teilerfremd zu p sei, führt auf gleiche Weise zu einem Widerspruch. Also kann $g(x)$ nur dann $f(x)$ teilen, wenn c_n und b_m gleichzeitig durch p teilbar sind; a_k hat daher p^2 zum Faktor. Daraus folgt:

Sind alle Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ von

$$f(x)=x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_k$$

durch die Primzahl p teilbar, und ist insbesondere a_x durch

keine höhere Potenz von p teilbar als durch die erste, dann ist $f(x)$ irreduktibel.

Dieser wichtige Satz, an den sich manche Erweiterungen knüpfen lassen, heißt nach Eisenstein (Journ. f. Math. 39, S. 166), wiewohl ihn Schoenemann seinem Wesen nach zuerst gefunden und veröffentlicht hat (Journ. f. Math. 32, S. 100, und 40, S. 188).

§ 50. Ist die ganze ganzzahlige Funktion $f(x)$ reduktibel, so gibt es der Definition gemäß eine Zerlegung von $f(x)$ in zwei Faktoren, die selbst ganz und ganzzahlig sind,

$$f(x) = g(x) \cdot h(x).$$

Für jeden der beiden Faktoren g und h gilt dann wieder der Satz, daß er irreduktibel oder in Faktoren zerlegbar ist. Nach den Festsetzungen aus § 42 ist der Grad jedes Faktors kleiner als der der zerlegten Funktion, aber größer als Null. Folglich muß die Zerlegung nach einer endlichen Anzahl von Operationen beendet sein. Jede ganze ganzzahlige Funktion einer Veränderlichen ist entweder irreduktibel oder in eine endliche Anzahl irreduktibler Faktoren zerlegbar.

Sind zwei ganze Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben, so können drei Fälle eintreten: entweder ist die eine ein Teiler der anderen, oder beide haben einen gemeinsamen Teiler niedereren Grades, oder sie sind zueinander teilerfremd. Ist die eine der beiden Funktionen irreduktibel, dann fällt die zweite Möglichkeit fort, d. h. eine irreduktible Funktion ist entweder Teiler einer anderen oder teilerfremd zu ihr.

Die irreduktible Funktion $f(x)$ möge zur Funktion $g(x)$ teilerfremd sein, aber das Produkt $g(x) \cdot h(x)$ teilen. Infolge der ersten Annahme kann man nach (9a), § 44 zwei ganze Funktionen $P(x)$ und $Q(x)$ bestimmen, für die die Gleichung gilt

$$P(x) f(x) + Q(x) g(x) = 1,$$

so daß also

$$(P(x) h(x)) f(x) + Q(x)(g(x) h(x)) = h(x)$$

wird. Infolge der zweiten Annahme ist die linke Seite der letzten Gleichung, also auch die rechte, d. h. $h(x)$ durch $f(x)$ teilbar. Teilt eine irreduktible Funktion das Produkt zweier (also auch mehrerer) ganzen Funktionen, so teilt sie mindestens eine von ihnen.

Daraus folgt sofort: Jede ganze Funktion einer Variablen ist, abgesehen von konstanten Zahlenfaktoren, nur auf eine Art als Produkt irreduktibler Faktoren darstellbar. Denn

hätte man zwei Zerlegungen der ganzen Funktion $F(x)$ in irreduktible Funktionen

$$F(x) = g(x) \cdot h(x) \cdot k(x) \cdots = g_1(x) \cdot h_1(x) \cdot k_1(x) \cdots,$$

so müßte $g_1(x)$ eine der Funktionen $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$, ... teilen, etwa $g(x)$, und da $g(x)$ auch irreduktibel ist, so müßte

$$g(x) = cg_1(x)$$

sein, wo c eine Konstante bedeutet. Setzt man diesen Wert von $g(x)$ in die Gleichung für $F(x)$ ein und dividiert durch $g(x)$, so entsteht die Relation

$$ch(x) \cdot k(x) \cdots = h_1(x) k(x) \cdots$$

An diese Gleichung knüpfen wir dieselben Betrachtungen und finden ebenso, daß etwa

$$h(x) = c_1 h_1(x)$$

ist und daraus

$$cc_1 k(x) \cdots = k_1(x) \cdots$$

usf. Bis auf konstante Zahlenfaktoren stimmen also beide Zerlegungen von $F(x)$ miteinander überein.

§ 51. Für die Zerlegung einer ganzen ganzzahligen Funktion haben wir gefordert, daß ein etwa vorhandener Teiler ganz und ganzzahlig sei. Wir können aber die Forderung auch dahin gehen lassen, daß der Teiler als Koeffizienten zwar noch rationale, aber nicht notwendig ganze Zahlen habe. Dann ist es denkbar, daß bei dieser allgemeineren Forderung rationaler Koeffizienten der Teiler einer Funktion zerlegbar ist, die bei der engeren Forderung ganzzahliger Koeffizienten der Teiler unzerlegbar bleibt. Wir werden aber jetzt zeigen, daß dieser Fall nicht eintreten kann, d. h. wenn die ganze ganzzahlige Funktion $f(x)$ in zwei Faktoren $g(x)$ und $h(x)$ mit rationalen gebrochenen Koeffizienten zerlegbar ist

$$f(x) = g(x) h(x),$$

dann ist $f(x)$ auch in zwei Faktoren mit rationalen ganzen Koeffizienten zerlegbar.

Dieser Satz stammt von C. Fr. Gauß (Disquis. arithm. § 42, Werke I, p. 34).

Um seine Richtigkeit nachzuweisen, zeigen wir zunächst: Wenn in den beiden Funktionen

$$g(x) = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdot}{\Gamma} \qquad h(x) = \frac{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 +}{\Delta}$$

die Konstanten Γ, Δ; $c_0, c_1, c_2, \ldots$; $d_0, d_1, d_2, \ldots$ ganze Zahlen sind, wenn ferner die c unter sich und auch die d unter sich keinen ge-

meinsamen Teiler haben, dann hat das Produkt $g \cdot h$ zum kleinsten gemeinsamen Nenner das Produkt $\Gamma \cdot \Delta$. Denn es sei $p^{\varkappa}$ die höchste in Γ und p^{λ} die höchste in Δ als Faktor vorkommende Potenz der beliebigen Primzahl p; ferner seien $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{\alpha-1}$ sowohl wie $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{\beta-1}$ durch p teilbar, dagegen weder c_α noch d_β, dann wird der Koeffizient von $x^{\alpha+\beta}$ in $g \cdot h$, nämlich

$$[c_\alpha d_\beta + c_{\alpha+1} d_{\beta-1} + c_{\alpha+2} d_{\beta-2} + \cdots$$
$$+ c_{\alpha-1} d_{\beta+1} + c_{\alpha-2} d_{\beta+2} + \cdots] : (\Gamma\Delta)$$

im Zähler keine Potenz von p als Faktor enthalten, da $c_\alpha d_\beta$ durch p nicht teilbar ist, während alle folgenden Summanden in der eckigen Klammer durch p teilbar sind. Folglich tritt $p^{\varkappa+\lambda}$ in den Nenner von $g \cdot h$. Das gleiche gilt von jeder in Γ oder in Δ auftretenden Primzahl, und somit ist dieser erste Teil des Beweises geliefert.

Setzen wir weiter mit ganzzahligen Koeffizienten der Zähler und ganzzahligen Γ, Δ

$$G(x) = \frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots}{\Gamma}, \quad H(x) = \frac{D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots}{\Delta},$$

und ist hier der größte gemeinsame Teiler k der $C_0, C_1, C_2, \ldots$ teilerfremd zu Γ, und l, der von $D_0, D_1, D_2, \ldots$, teilerfremd zu Δ, dann nehmen wir k und l aus den Koeffizienten heraus und setzen

$$G(x) = k \cdot g(x), \quad H(x) = l \cdot h(x).$$

$g(x)$ und $h(x)$ sind hier Funktionen, wie wir sie zu Anfang dieses Paragraphen behandelt haben.

Wenn nun das Produkt

$$G(x) H(x) = kl \cdot g(x) h(x)$$

ganzzahlig wird, so folgt nach dem soeben bewiesenen, auf $g(x)$, $h(x)$ bezüglichen Satze, daß kl durch Γ, Δ teilbar ist. Nach unseren Festsetzungen sind k und l teilerfremd zu Γ bzw. zu Δ, also wird

$$k = \varrho \cdot \Delta, \quad l = \sigma \cdot \Gamma,$$

wobei ϱ und σ ganze Zahlen bedeuten. Sonach kann man setzen

$$G(x) = \frac{\varrho\Delta}{\Gamma} \gamma(x), \quad H(x) = \frac{\sigma\Gamma}{\Delta} \eta(x),$$

wobei γ und η ganze ganzzahlige Funktionen von x bedeuten.

Ist also eine ganze ganzzahlige Funktion $f(x)$ in zwei Faktoren mit rationalen gebrochenen Koeffizienten zerlegbar

$$f(x) = G(x) \cdot H(x),$$

so ist auch die Darstellung vorhanden

$$f(x) = \varrho\sigma \cdot \gamma(x)\eta(x),$$

d. h. $f(x)$ ist auch in ganzzahlige Faktoren zerlegbar. Damit ist der Gaußsche Satz bewiesen.

§ **52.** Wir haben in den vorhergehenden Paragraphen mehrfach mit der Zerlegung und mit den Teilern ganzer Funktionen einer Veränderlichen zu tun gehabt, ohne aber bisher auf die prinzipiellen Erörterungen des Teilerbegriffes einzugehen. Das soll jetzt geschehen. Wir knüpfen dabei an Sätze aus der Zahlentheorie an. Wenn wir sagen: „5 ist eine Primzahl", so heißt das: „5 ist nicht als Produkt zweier ganzen Zahlen des natürlichen Zahlenbereiches 1, 2, 3, 4, ... darstellbar" (natürlich abgesehen von dem hier und im folgenden stets auszuschließenden Falle, daß einer der Faktoren gleich der positiven oder gleich der negativen Einheit wird). Dagegen zeigen die Gleichungen

$$5 = (2 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1}) = (1 + 2\sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1}),$$

daß die 5 im Bereiche der ganzen komplexen Zahlen $(a + b\sqrt{-1})$ zerlegbar ist. Andererseits ist z. B. die Zahl 7 in beiden Bereichen, dem der natürlichen ganzen und dem der komplexen ganzen Zahlen, unzerlegbar. Aus diesen Beispielen ersieht man: Es muß vor allem bestimmt werden, was als rational angesehen werden soll. Alles dies wird in dem sogenannten Rationalitätsbereiche zusammengefaßt.

Ähnlich bei ganzen Funktionen. Handelt es sich um die Zerlegung der ganzen Funktion $f(x)$, so ist zunächst festzustellen, welche Arten von Größen als Koeffizienten der Faktoren auftreten dürfen; denn davon hängt wesentlich die Zerlegungsmöglichkeit ab. So ist z. B. $x^2 - 3$ unzerlegbar, wenn nur Faktoren mit rationalen Koeffizienten zugelassen werden; gestattet man das Auftreten von beliebigen reellen Größen, dann ist die Zerlegung derselben Funktion

$$x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

möglich; $x^2 + 3$ bleibt auch hier irreduktibel, wird aber zerlegbar, wenn wir beliebige komplexe Koeffizienten zulassen, da dann die Zerlegung gilt

$$x^2 + 3 = (x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i) \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Unter einem Rationalitätsbereiche oder einem Körper verstehen wir eine Gesamtheit von Größen, die so beschaffen ist, daß die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient irgend zweier dieser Größen auch unter ihnen vorkommt; ausgenommen sind nur die Quotienten, deren Divisor die Null ist. Wir wollen von dem, nur durch die Null allein gebildeten Körper absehen, also annehmen, daß

ein Körper mindestens eine von 0 verschiedene Größe enthält. Dividiert man diese durch sich selbst, so folgt die Existenz der Einheit in dem Körper, und da aus ihr durch die vier gestatteten Operationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division jede rationale, positive oder negative Größe sich herleiten läßt, so umfaßt jeder Körper die Gesamtheit aller rationalen Zahlen. Umgekehrt bilden alle rationalen Zahlen einen Körper. Dieser ist demnach der kleinste überhaupt vorhandene; er heißt der absolute Körper; er werde durch $K(1)$ oder K bezeichnet.

Wenn alle Größen eines Körpers K_1 in einem anderen Körper K_2 vorkommen, dann nennen wir K_1 einen Teiler von K_2 und umgekehrt K_2 ein Vielfaches von K_1. Der absolute Körper ist ein Teiler jedes Körpers.

Fügt man den Größen eines Körpers K eine neue Größe ω hinzu, so entsteht ein neuer allgemeiner Körper $K(\omega)$. Man sagt, ω sei dem Körper K adjungiert oder $K(\omega)$ sei durch Adjungierung von ω zu K entstanden. In gleicher Weise kann man dem Körper $K(\omega)$ eine neue Größe ω_1 adjungieren; es entsteht dann der Körper $K(\omega, \omega_1)$; usf. Der allgemeinste Körper besteht aus allen reellen und komplexen, rationalen und irrationalen Zahlen; wir nennen ihn den Totalkörper. Er umschließt jeden Körper als Teiler.

Die Notwendigkeit der Einführung solcher Begriffe haben bereits N. H. Abel (Oeuvres I, p. 479, und II, p. 220) und E. Galois (Oeuvres p. 34) gefühlt; ihre Präzisierung und konsequente Verwendung verdankt man R. Dedekind (in Dirichlet: Vorlesung über Zahlentheorie, 4. Aufl. 1894, S. 452) und L. Kronecker (Journ. f. Math., Bd. 92, S. 3; 1882; Werke II, S. 248).

§ 53. Ist eine beliebige ganze Funktion $f(x)$ vorgelegt, so ist der kleinste Körper K_1, dem alle Koeffizienten von f angehören, mit f zugleich gegeben. Wir sagen, die Funktion $f(x)$ gehört zum Körper K_1; und jede Betrachtung, die an $f(x)$ anknüpft, muß einen Körper zugrunde legen, der K_1 als Teiler besitzt; denn nur in einem solchen finden sich die Koeffizienten des gegebenen $f(x)$ als bekannte Größen. Es sei nun K_0 ein derartiger Körper, dann heißt $f(x)$ im Körper K_0 reduktibel, wenn f als Produkt zweier ganzen Funktionen $g(x) \cdot h(x)$ darstellbar ist, deren Koeffizienten sämtlich in K_0 enthalten sind.

Beschränkt man sich auf den Körper, der aus sämtlichen reellen Zahlen oder Größen gebildet wird, so ist in ihm jede ganze Funktion einer Veränderlichen in lineare und quadratische Faktoren zerlegbar; das wird später gezeigt werden.

Wir haben uns bei der Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers auf den Fall beschränkt, daß die Koeffizienten der vorgelegten

Funktionen dem Körper $K(1)$ der rationalen Zahlen angehören. Diese Einschränkung können wir aber jetzt fallen lassen und einen willkürlichen Körper zugrunde legen. Auf ihn lassen sich alle oben gemachten Schlußfolgerungen ungeändert übertragen, da sie sich nur auf die Verwendung der vier einfachsten Operationen stützen, und man erkennt, daß die dort erlangten Resultate auch hier Gültigkeit besitzen.

Als Beispiel suchen wir in dem Körper $K(1, i)$, d. h. in der Gesamtheit der Zahlen $(a + bi)$, worin a und b relle rationale Zahlen bedeuten, den größten gemeinsamen Teiler der beiden ganzen Funktionen

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + ix + 2 \quad \text{und} \quad f_1(x) = x^4 + ix^3 - ix - 1.$$

Wir behalten die früheren Bezeichnungen bei (§ 44) und finden durch fortgesetzte Divisionen

$$q_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = -ix^3 + 4x^2 + 2ix + 3,$$
$$q_2(x) = ix + 3, \qquad f_3(x) = -10(x^2 + ix + 1),$$
$$q_3(x) = \frac{1}{10}(ix - 3), \quad f_4(x) = 0.$$

Also ist

$$-\frac{1}{10} f_3(x) = x^2 + ix + 1$$

der gesuchte größte gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f_1(x)$ in dem Körper $K(1, i)$.

§ 54. Wir wollen noch einige Sätze ableiten, die sich auf das Verhältnis eines beliebigen reellen Körpers K zu dem, durch die Adjungierung von $i = \sqrt{-1}$ erweiterten Körper $K(i)$ beziehen. Es gelten folgende Theoreme:

I. Ist die zu $K(i)$ gehörige ganze Funktion $F(x) + iG(x)$, in der F und G zu K gehören, durch eine zu K gehörige ganze Funktion $\varphi(x)$ teilbar, so werden $F(x)$ und $G(x)$ einzeln durch $\varphi(x)$ teilbar. In der Tat folgt aus der Annahme der Teilbarkeit die Gleichung

$$F(x) + iG(x) = \varphi(x)[f(x) + ig(x)];$$

also ist

$$F(x) = \varphi(x) \cdot f(x) \quad \text{und} \quad G(x) = \varphi(x) \cdot g(x).$$

II. Ist die zu K gehörige Funktion $F(x)$ durch die zu $K(i)$ gehörige Funktion $(f(x) + ig(x))$ teilbar, wo $f(x)$ und $g(x)$ zu K gehören, dann ist $F(x)$ auch durch $(f(x) - ig(x))$ teilbar. Aus der Voraussetzung folgt

$$F(x) = [f(x) + ig(x)] \cdot [f_1(x) + ig_1(x)].$$

Wir setzen nun im Rationalitätsbereiche K oder im Körper K

$$f(x) = t(x) \cdot \varphi(x), \quad g(x) = t(x) \cdot \psi(x);$$
$$f_1(x) = t_1(x) \cdot \varphi_1(x), \quad g_1(x) = t_1(x) \cdot \psi_1(x),$$

wo $t(x)$ der größte gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $g(x)$ in K sein soll, und $t_1(x)$ der von $f_1(x)$ und $g_1(x)$. Dann gilt die Gleichung

$$F(x) = t(x)t_1(x)\left[(\varphi(x)\varphi_1(x) - \psi_1(x)\psi(x)) + i(\varphi(x)\psi_1(x) + \varphi_1(x)\psi(x))\right];$$

demnach ist der Faktor von i gleich Null, d. h.

$$\varphi(x)\psi_1(x) = -\varphi_1(x)\psi(x);$$

und da $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ebenso wie $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ keine gemeinsamen Teiler haben, so ist

$$\varphi_1(x) = \pm\varphi(x), \quad \psi_1(x) = \mp\psi(x).$$

Es wird folglich

$$(13) \quad \begin{cases} \pm F(x) = t(x)t_1(x)[\varphi(x) + i\psi(x)][\varphi(x) - i\psi(x)] \\ \qquad\quad = t_1(x)[\varphi(x) + i\psi(x)] \cdot [f(x) - ig(x)]; \end{cases}$$

und das beweist die Richtigkeit der Behauptung.

Insbesondere folgt für $t(x) = 1$, daß $\varphi = f$, $\psi = g$ ist und

$$(13\text{a}) \quad \begin{cases} \pm F(x) = t_1(x) \cdot [f(x) + g(x)i] \cdot [f(x) - g(x)i] \\ \qquad\quad = t_1(x)[f(x)^2 + g(x)^2]. \end{cases}$$

III. Haben die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ des vorigen Satzes keinen gemeinsamen Teiler, dann ist zugleich mit $(f(x) \pm ig(x))$ auch das Produkt

$$[f(x) \pm ig(x)][f(x) \mp ig(x)] = f(x)^2 + g(x)^2$$

ein Teiler von $F(x)$. — Ist in diesem Falle $[f(x) + ig(x)]^\mu$ ein Teiler von $F(x)$, so ist es auch die Potenz

$$[f(x)^2 + g(x)^2]^\mu.$$

Denn zunächst hat F wegen der Teilbarkeit durch $[f + ig]$ nach (13a) auch den Faktor $[f^2 + g^2]$; also ist der Quotient

$$F_1(x) = \frac{F(x)}{f(x)^2 + g(x)^2}$$

eine ganze, durch $[f + ig]^{\mu-1}$ teilbare Funktion. Für sie gilt, wenn $\mu > 1$ ist, das gleiche; also ist $F_1(x)$ durch $[f(x)^2 + g(x)^2]$ teilbar, ferner $F(x)$ durch $[f(x)^2 + g(x)^2]^2$, usf.

§ 55. Wir sind jetzt imstande, eine (oben § 46) noch offen gelassene Frage zu beantworten. $F(x)$ und $G(x)$ seien zwei teiler-

fremde Funktionen von x, und F von höherem Grade als G; ferner sei F zerlegbar

$$F(x) = f(x) \cdot f_1(x),$$

und zwar so, daß f teilerfremd zu f_1 ist. Dann haben wir gesehen, (§ 46), daß eine Zerfällung

$$\frac{G(x)}{F(x)} = \frac{K(x)}{f(x)} + \frac{K_1(x)}{f_1(x)} \tag{14}$$

besteht, bei der die Zähler auf der rechten Seite von geringerem Grade sind als die entsprechenden Nenner. Gesetzt nun, es gäbe eine zweite derartige Zerfällung des Quotienten $G : F$,

$$\frac{G(x)}{F(x)} = \frac{L(x)}{f(x)} + \frac{L_1(x)}{f_1(x)},$$

so würde

$$\frac{K(x) - L(x)}{f(x)} + \frac{K_1(x) - L_1(x)}{f_1(x)} = 0,$$

$$f(x)[K_1(x) - L_1(x)] = - f_1(x)[K(x) - L(x)],$$

also $f(x)$ ein Teiler der rechten Seite der letzten Gleichung sein. Da $f(x)$ teilerfremd zu $f_1(x)$ ist, so müßte $K(x) - L(x)$ ein Multiplum von f werden; diese Differenz ist von geringerem Grade als f. Sonach muß der Faktor von f verschwinden, also

$$K(x) \equiv L(x) \quad \text{und ebenso} \quad K_1(x) \equiv L_1(x)$$

sein, d. h. die Zerlegung (14) in Partialbrüche ist n u r a u f e i n e Art möglich.

Falls einer der Nenner $f(x)$, $f_1(x)$ in teilerfremde Faktoren zerspalten werden kann, lassen sich auf den zugehörigen Bruch die gleichen Schlüsse anwenden, und so folgt die Eindeutigkeit der Zerlegung (14).

Es bleibt noch die Eindeutigkeit der Zerlegung

$$\frac{g}{f^{\varkappa}} = \frac{g'}{f^{\varkappa}} + \frac{g''}{f^{\varkappa-1}} + \frac{g'''}{f^{\varkappa-2}} + \cdots + \frac{g^{(\varkappa)}}{f^1}$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, die von

$$g = g' + g'' \cdot f + g''' \cdot f^2 + \cdots + g^{(\varkappa)} \cdot f^{\varkappa-1}$$

zu beweisen übrig. Hierin haben g', g'', g''', ... Grade, die geringer sind als der von f; und g hat einen Grad, der geringer ist als der von $f^{\varkappa}$. Ist noch eine zweite solche Darstellung möglich, etwa

$$g = \gamma' + \gamma'' \cdot f + \gamma''' \cdot f^2 + \cdots + \gamma^{(\varkappa)} \cdot f^{\varkappa-1},$$

so erhält man die Identität

$$\gamma' - g' = f[(g'' - \gamma'') + (g''' - \gamma''')f + \cdots],$$

aus der man entnimmt, daß $\gamma' - g'$ durch f teilbar ist. Da f von höherem Grade ist als jene Differenz, so muß $\gamma' = g'$, und da f von Null verschieden ist, auch

$$(g'' - \gamma'') + (g''' - \gamma''')f + \cdots = 0$$

sein. Hieraus folgt ebenso $\gamma'' = g''$ usw., und der gewünschte Beweis ist geliefert.

§ 56. Enthält die ganze Funktion $f(x)$ die α^{te}, aber keine höhere Potenz der irreduktiblen Funktion $P(x)$ als Faktor, so ist

$$f(x) = P(x)^{\alpha} \cdot Q(x),$$

worin P und Q teilerfremd zueinander sind. Nach § 33 wird die erste Ableitung von $f(x)$

$$f'(x) = P(x)^{\alpha-1}[\alpha P'(x)\, Q(x) + P(x)\, Q'(x)].$$

Die eckige Klammer ist nicht mehr durch P teilbar; denn sonst müßte $P' \cdot Q$ es sein; das ist aber unmöglich, da P, Q teilerfremd sind, und P auch die Funktion P', die von niederem Grade ist als P, nicht teilen kann. Folglich ist $f'(x)$ durch die $(\alpha - 1)^{\text{te}}$, aber durch keine höhere Potenz von P teilbar. Die Schlüsse gelten auch für $\alpha = 1$; dann ist $f'(x)$ nicht mehr durch P teilbar; für $\alpha = 0$ gelten die Schlüsse nicht mehr.

Der hergeleitete Satz läßt sich in folgender Form umkehren: Haben f und f' einen gemeinsamen irreduktibeln Faktor P, und teilt genau die $(\alpha - 1)^{\text{te}}$ Potenz von P die Ableitung f', so ist genau die α^{te} Potenz von P ein Teiler von f. Denn ist P^{β} die höchste Potenz von P, die f teilt, so $P^{\beta-1}$ die höchste, die f' teilt; und nach der Voraussetzung ist es die $(\alpha - 1)^{\text{te}}$. Also $\beta - 1 = \alpha - 1$, d. h. $\beta = \alpha$.

Aus den angestellten Betrachtungen ergibt sich: I. Sind $P, Q, R, \ldots, S$ die verschiedenen irreduktiblen Faktoren von f, und gilt die Zerlegung

$$f(x) = P(x)^{\alpha} Q(x)^{\beta} R(x)^{\gamma} \cdots S(x)^{\delta},$$

so ist

$$f'(x) = P(x)^{\alpha-1} Q(x)^{\beta-1} \cdots S(x)^{\delta-1} \cdot T(x),$$

wo T zu $P, Q, R, \ldots, S$ teilerfremd ist.

II. Sind $P, Q, R, \ldots, S$ die verschiedenen gemeinsamen irreduktiblen Faktoren von f und f', und ist

$$f'(x) = P(x)^{\alpha-1} Q(x)^{\beta-1} \cdots S(x)^{\delta-1} \cdot T(x),$$

so wird

$$f(x) = P(x)^{\alpha} Q(x)^{\beta} \cdots S(x)^{\delta} \cdot U(x),$$

wo U teilerfremd zu $[P(x) \cdot Q(x) \cdots S(x)]$ wird.

III. Der größte gemeinsame Teiler von

$$f(x) = P(x)^\alpha Q(x)^\beta R(x)^\gamma \cdots S(x)^\delta$$

und $f'(x)$ ist

$$W = P(x)^{\alpha-1} Q(x)^{\beta-1} R(x)^{\gamma-1} \cdots S(x)^{\delta-1},$$

und es wird

$$\frac{f(x)}{W} = P(x)\, Q(x)\, R(x) \cdots S(x).$$

IV. Ist

$$f'(x) = (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \cdots (x - x_r)^\delta,$$

wo $x_1, x_2, \ldots, x_r$ untereinander verschieden sein sollen, dann ist der größte gemeinsame Teiler der Funktion f und ihrer Ableitung f' gleich

$$T(x) = (x - x_1)^{\alpha-1} (x - x_2)^{\beta-1} \cdots (x - x_r)^{\delta-1},$$

so daß der Quotient

$$\frac{f(x)}{T(x)} = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_r)$$

nur einfache lineare Faktoren besitzt.

Viertes Kapitel.

Gleichungen.

§ 57. Unter einer Gleichung verstehen wir die Gleichsetzung zweier mathematischen Ausdrücke. Bei willkürlicher Gleichsetzung kann man dabei natürlich auf Unrichtigkeiten stoßen,

$$2 \cdot 3 = 7 \quad \text{oder} \quad a + 1 = a - 1.$$

Trifft man im Laufe einer Untersuchung auf solche widerspruchsvolle Gleichung, so ist das ein Zeichen dafür, daß man entweder von falschen Voraussetzungen ausgegangen war oder falsche Schlüsse gemacht hat.

Das folgende Beispiel möge diese Verhältnisse erläutern. Es ist

$$1 > \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \; \frac{1}{5} > \frac{1}{6}, \; \frac{1}{7} > \frac{1}{8}, \cdots,$$

also die Summe der linken Seiten größer als die der rechten, daher der Ausdruck

$$p = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

eine wesentlich positive Größe. Wenn man andererseits p dadurch

umformt, daß man die zweite runde Klammer additiv und subtraktiv auf der rechten Seite hinzufügt, so kommt man auf die Form

$$p = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots\right),$$

und wenn man dann den Faktor 2 von der zweiten Klammer in deren einzelne Summanden multipliziert, so ergibt sich

$$p = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots\right)$$
$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots\right) = 0.$$

Also müßte p zugleich Null und größer als Null sein. Dieser Widerspruch lehrt, daß auf Summen von unendlich vielen Summanden die gewöhnlichen Rechnungsoperationen nicht so ohne weiteres angewendet werden dürfen.

In ähnlicher Art können auch bei Systemen von mehreren Gleichungen Widersprüche auftreten. So z. B. ist das System zweier Gleichungen

$$a + b = 1, \quad a^2 + 2ab + b^2 = 4$$

ein unverträgliches, wie die Quadrierung der ersten Gleichung zeigt.

§ 58. Identische Gleichungen sind solche, deren beide Seiten identisch einander gleich, oder auch verschiedene Formen derselben Größe sind. Kommen in ihnen unbestimmte Größen vor, so müssen beide Seiten dieselben Werte ergeben, welche Zahlenwerte jenen unbestimmten Größen auch beigelegt werden. Solche sind z. B.

$$3 = 3; \quad 1 + 1 = 2; \quad a(b + c) = ab + ac; \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Wenn eine nicht identische Gleichung eine oder mehrere Unbestimmte enthält, dann wird für willkürliche Werte derselben im allgemeinen die Gleichung nicht erfüllt sein, d. h. die Werte der beiden Seiten werden verschieden ausfallen. Nun kann man die Forderung aufstellen, alle Unbestimmten der Gleichung so zu bestimmen, daß die Gleichung befriedigt wird, d. h. daß die Werte der beiden Seiten übereinstimmen. So ist die Gleichung mit der Unbestimmten x

$$x^2 = 5x - 6$$

nicht identisch; denn sie wird z. B. durch den Wert $x = 0$ nicht befriedigt; sie enthält, wie wir annehmen, die Forderung, alle Zahlen anzugeben, deren Quadrat um 6 geringer ist als das Fünffache der Zahl. Die Forderung wird durch $x = 2$ und $x = 3$ befriedigt und nur durch diese beiden Werte. — Bei dem Systeme

$$x + y = 5; \quad x \cdot y = 6$$

wird nach zwei Zahlen gefragt, deren Summe 5 und deren Produkt 6 ist. Diese Forderung erfüllen die beiden Systeme

$$x = 2,\ y = 3 \quad \text{und} \quad x = 3,\ y = 2.$$

Solche Gleichungen nennen wir Bestimmungsgleichungen; die Unbestimmten, deren Werte gesucht werden, heißen Unbekannte und diese Werte selbst die Wurzeln der Gleichung oder des Gleichungssystems. Die Bezeichnung „Wurzel" ist eine Erweiterung der ursprünglich für die Lösung der binomischen Gleichungen $x^n = a$ benutzten: $x = \sqrt[n]{a}$. Eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ wollen wir auch als Wurzelpunkt der Funktion $f(x)$ bezeichnen, in Anlehnung an die geometrische Veranschaulichung.

§ 59. Eine Gleichung kann dadurch auf eine veränderte Form gebracht werden, ohne daß ihr Inhalt dabei beeinflußt würde, daß man auf beiden Seiten dieselben Größen addiert oder subtrahiert, mit derselben, von Null verschiedenen Konstanten multipliziert oder dividiert. Durch Multiplikation oder Division mit einer Funktion der Unbekannten, durch Potenzieren oder Radizieren beider Gleichungsseiten mit dem gleichen Exponenten kann dagegen der Inhalt der Gleichung geändert werden. So fordert

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

von der Unbekannten x nicht das gleiche wie die Gleichungen

$$(x+1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \quad \text{oder wie} \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0;$$

so hat ferner die Gleichung

$$x - 2 = 5 \text{ die eine Wurzel } x = 7,$$

dagegen hat

$$(x-2)^2 = 5^2 \text{ die beiden Wurzeln } x = 7 \quad \text{und} \quad x = -3.$$

Man kann jede Gleichung mit beliebig vielen Variablen oder Unbekannten

$$\varphi(x, y, z, \cdots) = \psi(x, y, z, \cdots)$$

durch beiderseitige Subtraktion von ψ auf die Gestalt

$$f(x, y, z, \cdots) = 0 \tag{1}$$

bringen; man sagt, die Gleichung sei auf Null reduziert.

§ 60. Eine solche auf Null reduzierte Gleichung (1) heißt algebraisch oder transzendent, je nachdem f eine algebraische oder eine transzendente Funktion der in ihr vorkommenden Unbekannten ist. Dabei ist zu bemerken, daß (1) transzendent wird, wenn f eine

transzendente Funktion auch nur von einer einzigen eingehenden Unbekannten x, oder y, oder z, ... ist. So sind

$$a^x - a = 0, \quad x^y - y^x = 0, \quad x \sin y - 1 = 0$$

auf Null reduzierte transzendente Gleichungen.

Die einfachste Gestalt einer auf Null reduzierten algebraischen Gleichung ist die, daß eine ganze Funktion in ihrer Normalform gleich Null gesetzt wird; die allgemeinste die, daß man eine Radikalfunktion gleich Null setzt. Man kann aber durch passende Umformung stets die zweite Form in die erste überführen. Das wollen wir für den Fall einer Unbekannten zeigen. Der allgemeine Fall wird ganz ebenso behandelt.

Bei der Bildung einer jeden Radikalfunktion geht man von einer rationalen Funktion der Unbekannten x aus. Das Gebiet des Rationalen verläßt man durch ein erstmaliges Radizieren. Die dadurch erlangte Wurzel, etwa die n_1^{te} aus x heiße x_1. Nun bildet man weiter eine rationale Funktion aus x und x_1, die also zu dem Körper $K(x, x_1)$ gehört. Das so festgelegte Gebiet wird durch eine zweite Radizierung erweitert; die dadurch eingeführte neue Wurzel sei

$$x_2 = \sqrt[n_2]{\varphi_2(x, x_1)},$$

wobei die Funktion φ_2 nicht notwendig beide Größen x und x_1 explizit enthält. Weiter bildet man eine rationale Funktion von x, x_1, x_2, usf., bis man zu einer rationalen Funktion von $x, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\varrho$ kommt:

$$\text{(2)} \qquad \varphi_\varrho(x, x_1, \cdots x_\varrho) = \frac{a_0 + a_1 x_\varrho + a_2 x_\varrho^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x_\varrho + b_2 x_\varrho^2 + \cdots};$$

dabei ist

$$\text{(3)} \qquad x_\varrho^{\,n} = \varphi_{\varrho-1}(x, x_1, \cdots, x_{\varrho-1})$$

eine rationale Funktion der Argumente $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$. Mit Hilfe von (3) kann man Zähler und Nenner von φ_ϱ auf den Grad $(n-1)$ in x_ϱ reduzieren, indem

$$x_\varrho^{\,n} = \varphi_{\varrho-1}, \quad x_\varrho^{\,n+1} = \varphi_{\varrho-1} \cdot x_\varrho, \quad x_\varrho^{\,n+2} = \varphi_{\varrho-1} \cdot x_\varrho^{\,2}, \quad \cdots$$

gesetzt wird. Wir suchen jetzt zwei Funktionen A und B so zu bestimmen, daß das Produkt aus A in den Zähler von φ_ϱ, und das aus B in den Nenner des φ_ϱ von dem Radikal x_ϱ frei werden. Statt die Gleichung $\varphi_\varrho = 0$, als Gleichung für x aufgefaßt, zu lösen, behandeln wir die von x_ϱ freie Form

$$\frac{A \cdot \varphi_\varrho}{B} = 0,$$

deren Wurzeln ja auch die von $\varphi_\varrho = 0$ einschließen.

Es reicht aus, dies für A und für $n=5$ durchzuführen. Wir setzen

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & x_\varrho & & x_\varrho & \\
 & & a_3 & & a_1 & a_0 \\
A & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} \\
 & a_2 & a_1 & a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} & a_3\varphi_{\varrho-1} \\
 & a_1 & a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} & a_3\varphi_{\varrho-1} & a_2\varphi_{\varrho-1}
\end{array}
$$

mit leicht erkennbarem Bildungsgesetz, und zeigen, daß das Produkt

$$
(4) \qquad [a_0 + a_1 x_\varrho + a_2 x_\varrho^2 + a_3 x_\varrho^3 + a_4 x_\varrho^4] \cdot A
$$

von x_ϱ frei dargestellt werden kann. Wir führen die Multiplikation (4) so durch, daß jedes Element der ersten Zeile der Determinante mit der eckigen Klammer in (4) multipliziert wird. Nachdem dies geschehen ist, subtrahieren wir von den Elementen der neuen ersten Zeile die zweite mit x_ϱ^4 multiplizierte, die dritte mit x_ϱ^3 multiplizierte, die vierte mit x_ϱ^2 multiplizierte und die fünfte mit x_ϱ^1 multiplizierte. Dadurch entsteht

$$
(a_0 + a_1 x_\varrho + \cdots + a_4 x_\varrho^4) A = \begin{vmatrix}
a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} & a_3\varphi_{\varrho-1} & a_2\varphi_{\varrho-1} & a_1\varphi_{\varrho-1} \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} \\
a_2 & a_1 & a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} & a_3\varphi_{\varrho-1} \\
a_1 & a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} & a_3\varphi_{\varrho-1} & a_2\varphi_{\varrho-1}
\end{vmatrix}
$$

also ein von x_ϱ freier Ausdruck, der durch Umstellung der Zeilen a die durchsichtige Form

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} & a_3\varphi_{\varrho-1} & a_2\varphi_{\varrho-1} & a_1\varphi_{\varrho-1} \\
a_1 & a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} & a_3\varphi_{\varrho-1} & a_2\varphi_{\varrho-1} \\
a_2 & a_1 & a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} & a_3\varphi_{\varrho-1} \\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_4\varphi_{\varrho-1} \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0
\end{vmatrix}
$$

gebracht werden kann.

Hat man in ähnlicher Weise B bestimmt, so setzt man an Stelle der Gleichung $\varphi_\varrho = 0$ nun die erweiterte

$$
\varphi_\varrho \cdot \frac{A}{B} = 0,
$$

in der x_ϱ nicht mehr vorkommt. Aus ihr kann in derselben Weise $x_{\varrho-1}$ entfernt werden, usf., bis man auf eine rationale Funktion von x geführt wird, deren Zähler dann gleich Null werden muß. Die „Radikalgleichungen" bieten demnach nichts wesentlich Neues gegenüber

den algebraischen Gleichungen, in denen eine ganze Funktion der Unbekannten gleich Null gesetzt wird.

Als Beispiel nehmen wir die Radikalgleichung

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0.$$

Man erhält in diesem Falle

$$x_1 = \sqrt[3]{x}; \quad \varphi_1 = 6 + x_1 + x_1{}^2;$$

$$\begin{vmatrix} -6 & x & x^2 \\ 1 & -6 & x \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad x^2 + 29x - 216 = (x-8)(x+27),$$

so 3 $x = 8$ und $x = -27$ die Wurzeln der vorgelegten Radikalgleichung sind, oder vielmehr, daß ihre Wurzeln sich unter den Werten 8 und -27 finden müssen.

§ 61. Hiernach bietet die Klassifizierung der ganzen Funktionen

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ein naturgemäßes Einteilungsprinzip für die algebraischen Gleichungen

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0,$$

und wir unterscheiden diese Gleichungen zuerst nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden Unbekannten. Demnach sind die einfachsten Gleichungen die mit einer Unbekannten. Diese lassen sich wieder nach dem Grade einteilen, in welchem die Unbekannte ihrer höchsten Potenz nach in die Normalform der gleich Null gesetzten ganzen Funktion eingeht. So sind

$$a_0 + a_1 x = 0, \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0, \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0, \quad \ldots$$

die allgemeinsten Formen der Gleichungen ersten, zweiten, dritten, ... Grades unter der Annahme, daß der Koeffizient der jedesmal auftretenden höchsten Potenz der Unbekannten von Null verschieden ist. Die Funktionen auf den linken Seiten nennen wir die Gleichungspolynome.

Bei den Gleichungen mit mehreren Unbekannten liegen die Verhältnisse nicht so einfach, da bei ihnen die einzelnen Unbekannten in verschiedenen Graden eingehen können, wie z. B. in

$$ax + bx^2 + cxyz = 0.$$

Hier zeigt es sich als geboten, die nach sämtlichen Unbekannten genommene Dimensionenzahl als Einteilungsprinzip zu benutzen.

§ 62. Wir haben oben (§ 42) schon gesehen, daß, wenn x_1 eine Wurzel der nicht identisch erfüllten algebraischen Gleichung $f(x) = 0$

ist, dann das Gleichungspolynom $f(x)$ den Faktor $(x - x_1)$ hat; wir nennen $(x - x_1)$ einen **Wurzelfaktor** von $f(x)$. Es ist nun

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1} x + c_n \\ &= (x - x_1)(c_0 x^{n-1} + c_1' x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}') \\ &= (x - x_1) f_1(x). \end{aligned}$$

Besitzt $f(x) = 0$ eine zweite, von x_1 verschiedene Wurzel x_2, so folgt $(x_2 - x_1) f_1(x_2) = 0$, und da der erste Faktor der linken Seite von 0 verschieden ist, $f_1(x_2) = 0$, d. h. x_2 ist eine Wurzel von $f_1(x) = 0$. Demnach ist

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x - x_2)(c_0 x^{n-2} + c_1'' x^{n-3} + \cdots + c_{n-2}'') \\ &= (x - x_2) f_2(x) \end{aligned}$$

und daher

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_2(x).$$

Hat $f(x) = 0$ eine weitere, von x_1 und x_2 verschiedene Wurzel x_3, so ergibt sich ebenso

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) f_3(x),$$

wo das höchste Glied von $f_3(x)$ gleich $c_0 x^{n-3}$ ist. So geht man weiter bis zu

$$(5) \qquad f(x) = c_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Hieraus folgt, daß **eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades nur dann mehr als n untereinander verschiedene Wurzeln haben kann, wenn sie identisch befriedigt ist.** Denn hätte die Gleichung $f(x) = 0$ noch eine neue, von den n bisherigen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschiedene Wurzel x_0, dann folgte

$$f(x_0) \equiv c_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n) = 0;$$

da nun alle Differenzen $x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_n$ von Null verschieden sind, so muß $c_0 = 0$, also $f(x) \equiv 0$ sein.

§ 63. Wir sahen soeben, daß, wenn die Gleichung

$$f(x) \equiv c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

die Wurzel $x = x_1$ hat, dann das Gleichungspolynom in die Form gebracht werden kann

$$f(x) \equiv (x - x_1) f_1(x).$$

Hat auch $f_1(x) = 0$ dieselbe Wurzel $x = x_1$, dann ist in ähnlicher Weise

$$f_1(x) = (x - x_1) \varphi_2(x); \quad \text{also} \quad f(x) = (x - x_1)^2 \varphi_2(x).$$

Ist x_1 auch eine Wurzel von $\varphi_2(x) = 0$, dann folgt ebenso

$$f(x) = (x - x_1)^3 \varphi_3(x)$$

usf., bis man auf

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha \varphi_\alpha(x)$$

kommt, wo die Gleichung $\varphi_\alpha(x) = 0$ nicht weiter x_1 als Wurzel hat. Wir nennen dann x_1 eine α-fache Wurzel oder eine Wurzel von der Multiplizität α.

Aus dem Umstande, daß φ_α vom Grade $(n - \alpha)$ ist, kann man den Schluß ziehen: Die Summe der Multiplizitäten der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung kann den Grad der Gleichung nur überschreiten, wenn das Gleichungspolynom identisch verschwindet.

Der Fundamentalsatz der Algebra, den wir erst später ableiten werden, sagt aus, daß die Summe der Multiplizitäten der verschiedenen Wurzeln stets gleich dem Grade der Gleichung ist, oder daß jede Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln besitzt, wenn man jede Wurzel so oft zählt, wie ihre Multiplizität es angibt.

§ 64. Über die Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ des Polynoms $f(x)$ haben wir keinerlei Voraussetzungen gemacht; sie können also komplex sein. Gegenüber der Annahme reeller Koeffizienten bedeutet dies jedoch keine Verallgemeinerung. Denn ist etwa die Gleichung

$$(6) \quad (a_0 + b_0 i)x^n + (a_1 + b_1 i)x^{n-1} + \cdots + (a_n + b_n i) \equiv A + Bi = 0$$

vorgelegt, in der die $a_\varkappa, b_\varkappa, A, B$ reelle Größen bedeuten, so multipliziere man sie mit

$$(7) \quad (a_0 - b_0 i)x^n + (a_1 - b_1 i)x^{n-1} + \cdots + (a_n - b_n i) \equiv A - Bi.$$

Das Produkt beider Polynome

$$A^2 + B^2 \equiv (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)^2 + (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n)^2$$

hat nur reelle Koeffizienten, und die Gleichung $(2 \cdot n)^{\text{ten}}$ Grades in x

$$(8) \qquad A^2 + B^2 = 0$$

besitzt unter ihren Wurzeln alle Wurzeln von (6).

Weiß man also z. B., daß (8) $2n$ Wurzeln besitzt, so folgt, da weder (6) noch (7) mehr als n haben kann, daß (6) auch wirklich n Wurzeln besitzt.

§ 65. Hat die Gleichung $f(x) = 0$ mit reellen Koeffizienten die Größe $(p + qi)$ als α-fache Wurzel, dann hat sie auch $(p - qi)$ als α-fache Wurzel. Denn nach § 56 ist

$$f(x) = (x - p - qi)^\alpha \varphi_\alpha(x)$$

und nach § 54 ist dann $f(x)$ auch durch $(x - p + qi)^\alpha$ teilbar. Hieraus ist zu entnehmen, daß jede Gleichung mit reellen Koeffizienten entweder keine oder eine gerade Anzahl komplexer Wurzeln hat. Jede Gleichung ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat dagegen eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln, also mindestens eine.

§ 66. Von dem Satze § 62 wollen wir eine Anwendung machen. Es seien zwei ganze Funktionen $P(x)$, $Q(x)$ gegeben, m sei der höhere Grad der beiden Funktionen. Wenn dann der Quotient $P(x):Q(x)$ für $(m+1)$ Werte der Unbestimmten x den gleichen Zahlenwert, etwa c annimmt, wo $c \neq 0$ sei,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = c, \quad \text{für } x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m,$$

dann hat die Gleichung

$$P(x) - cQ(x) = 0$$

vom Grade m mehr als m Wurzeln, ist also identisch erfüllt, d. h. wenn wir

$$Q(x) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$$

setzen, dann wird

$$P(x) = b_0 c x^m + b_1 c x^{m-1} + \cdots + b_m c,$$

und der Bruch

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv c$$

wird identisch befriedigt.

§ 67. Ist eine Gleichung mit m Unbekannten vorgelegt

$$g(x, y, z, \ldots, u) = 0, \tag{9}$$

so kann man $(m-1)$ von ihnen feste, willkürliche Werte geben, z. B.

$$y = y_0, \quad z = z_0, \quad \ldots, \quad u = u_0$$

und dann nach der Eintragung dieser Werte in (9)

$$g(x; y_0, z_0, \ldots, u_0) = 0$$

als Gleichung mit der einen Unbekannten x auffassen. Dies wird, wenn diese Funktion nicht identisch verschwindet, durch eine endliche Anzahl von Werten befriedigt, wie der „Fundamentalsatz der Algebra" zeigt. Demnach bilden die Lösungen von $g = 0$ eine Mannigfaltigkeit von $(m-1)$ Dimensionen, und $g = 0$ hebt diese aus der m-fachen Mannigfaltigkeit der m Unbestimmten $x, y, z, \ldots, u$ heraus.

Schwieriger sind die Verhältnisse zu übersehen, wenn m Gleichungen mit n Unbekannten vorliegen. Man könnte dann so verfahren,

daß man eine der Unbekannten, etwa x, aus jedem Paare der vorgelegten Gleichungen

$$(9\text{a})\qquad g_\mu(x, y, z, \ldots, u) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

durch geschickte Kombination entfernt, eliminiert. Wir werden später eine Methode angeben, die diese Kombination durchführt und das Eliminationsresultat liefert. Das angegebene Verfahren ruft eine Reihe von Gleichungen hervor, die aus (9a) folgen und dabei frei von x sind, etwa

$$(10\text{a})\qquad h_\nu(y, z, \ldots, u) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, m').$$

Mit diesem System verfährt man hinsichtlich einer der noch vorkommenden Unbekannten, etwa y, genau so, wie zuerst mit dem Systeme der $g_\mu = 0$; man kommt so auf die Gleichungen

$$k_\pi(z, \ldots, u) = 0 \qquad (\pi = 1, 2, 3, \ldots, m'')$$

usf., bis das Verfahren von selbst ein Ende nimmt. Dabei kann es vorkommen, daß bei der Elimination einer Unbekannten mit dieser zugleich alle noch vorhandenen anderen Unbekannten wegfallen. Wird das Resultat dann nicht identisch gleich Null, so ist dies ein Zeichen dafür, daß das vorgelegte Gleichungssystem keine Lösungen hat, wie z.B.

$$x^2 + yz = a, \quad (x^2 + yz)^3 + (x^2 + yz) = b \qquad (a^3 + a \neq b).$$

Enthält das Resultat, wie hier, unbestimmte Größen, ohne identisch befriedigt zu sein, so liefert es eine notwendige Bedingung für die Existenz von Wurzeln des Gleichungssystems; im obigen Beispiele tritt als Bedingung für die Lösbarkeit auf:

$$a^3 + a = b.$$

Der Abschluß unseres Eliminationsalgorithmus wird also dann eintreten, wenn bei der Elimination einer jeden der noch vorhandenen Unbekannten aus je zwei der vorhandenen Gleichungen alle Unbekannte gleichzeitig verschwinden. Der Abschluß wird ferner dann eintreten, wenn nur eine einzige Gleichung übrig bleibt, aus der dann natürlich nicht weiter eliminiert werden kann. Diese eine Gleichung kann mehrere Unbekannte enthalten; tritt dies ein, dann stoßen wir auf den im Anfange dieses Paragraphen besprochenen Fall. Mit der Lösung dieser Schlußgleichung gehen wir in das vorletzte Eliminationssystem von Gleichungen ein und bestimmen in ihm die Wurzelwerte für die vorhandenen Unbekannten, und fahren so fort, bis wir zu dem System zurückgelangt sind, von dem wir ausgingen.

Das hier skizzierte Verfahren führt stets zum Ziele. Es leidet jedoch an dem Übelstande, im allgemeinen die Lösungen von (9a) nicht ausschließlich zu liefern, sondern neben ihnen eine Anzahl von fremden.

Dies erklärt sich daraus, daß zwar jedes der Systeme (9a), (10a), ... eine Folge des vorhergehenden ist, aber nicht umgekehrt das frühere eine Folge des späteren. Es wird gezeigt werden, daß und wie dieser Übelstand vermieden werden kann.

Es folge ein Beispiel:

$$g_1 \equiv x^2 - 3x + y + z + 2 = 0,$$
$$g_2 \equiv x^2 + xz + y - 1 = 0,$$
$$g_3 \equiv x^2 - x + y - z - 2 = 0.$$

Die Elimination von y erfolgt durch

$$h_1 \equiv g_2 - g_3 \equiv (x+1)(z+1) = 0,$$
$$h_2 \equiv g_3 - g_1 \equiv 2(x-z-2) = 0,$$
$$h_3 \equiv g_1 - g_2 \equiv -(x-1)(z+3) = 0;$$

weiter die von z durch

$$\frac{1}{2}(x-1)h_2 - h_3 \equiv (x+1)(x-1) = 0,$$
$$(x+1)h_3 + (x-1)h_1 \equiv -2(x+1)(x-1) = 0,$$
$$h_1 + \frac{1}{2}(x+1)h_2 \equiv (x+1)(x-1) = 0.$$

Also kann x nur $= +1$ oder $= -1$ sein. Man findet als Wurzeln des Systems der drei y die Systeme

$$x_1 = +1,\ y_1 = +1,\ z_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = -1,\ y_2 = -3,\ z_2 = -3.$$

Fünftes Kapitel.

Lineare Gleichungen.

§ 68. Die Normalform einer Gleichung ersten Grades oder einer linearen Gleichung für die Unbekannten x ist

$$(1) \qquad ax + b = 0;$$

sie auflösen heißt, die Werte von x bestimmen, die die lineare Funktion $(ax + b)$ zu Null machen. Dabei ist $a \neq 0$ vorauszusetzen; denn für $a = 0$ geht ja die Unbekannte x gar nicht in die Gleichung ein, und (1) hat für $a = b = 0$ unendlich viele Wurzeln, nämlich alle endlichen Werte; für $a = 0$, $b \neq 0$ dagegen keine. Für $a \neq 0$ ergibt sich als einzige Lösung von (1)

$$(1\text{a}) \qquad x = -\frac{b}{a}.$$

Die allgemeine Form der linearen Gleichung kann sehr verschieden sein. Wir geben einige Beispiele.

I. $$\frac{3x-5}{x^2-2x}+\frac{5x-1}{x^2-3x}=\frac{8x-17}{x^2-6x}$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $x(x-2)(x-3)(x-6)$, so kommt man auf die Normalform

$$16x-34=0$$

und auf deren Lösung

$$x=\frac{17}{8}.$$

II. Vorgelegt sei die Gleichung

$$7+\sqrt{x^2-11x+4}=x.$$

Man subtrahiert auf beiden Seiten 7 und quadriert; dann entsteht die Normalform

$$3x-45=0$$

und deren Lösung

$$x=15.$$

III. Um die gleichfalls in nichtrationaler Form auftretende Gleichung

$$\sqrt{x+a^2}-\sqrt{x}=b$$

zu lösen, addiert man auf beiden Seiten $\sqrt{x}$ und quadriert; man erhält dabei

$$x+a^2=x+2b\sqrt{x}+b^2;$$

daraus folgt durch Umsetzen

$$2b\sqrt{x}=a^2-b^2,$$

und die Normalform dieser wird

$$4b^2x-(a^2-b^2)^2=0.$$

§ 69. Wir wollen auch weitergehende Anwendungen machen und wählen zunächst die Darlegung der sogenannten „regula falsi“, die zur näherungsweisen Bestimmung der Wurzeln numerischer Gleichungen dient.

Vorgelegt ist eine ganze, also stetige Funktion $y=f(x)$. Der Wert $x=\xi$ möge $f(x)$ zu Null machen, $f(\xi)=0$, d. h. ξ möge eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ sein. Dabei soll für wachsende x die Funktion $f(x)$ bei $x=\xi$ durch Null gehen, etwa vom Negativen zum Positiven. Die geometrische Abbildung $B_1B_3B_2$ von $y=f(x)$ veranschaulicht diese Voraussetzungen. Wir nehmen ferner einen Wert $x_1<\xi$ und einen zweiten $x_2>\xi$ so nahe bei ξ, daß zwischen x_1 und x_2 keine weitere Wurzel von $f(x)=0$ als ξ liegt. In der Figur

sind OA_1 und OA_2 die Bilder von x_1 und x_2, während OQ das Abbild von ξ ist. Dann kann die Sehne $B_1 B_2$ als Näherung für die Kurve $B_1 B_2$ gelten und der Schnitt der X-Achse mit der Sehne als Näherungswert für den Punkt Q. Nennen wir den Schnitt A_3 und setzen $OA_3 = x_3$, so ist x_3 ein Näherungswert von ξ, der zwischen x_1 und x_2 liegt, also genauer ist als der eine von diesen beiden. x_3 liegt entweder zwischen A_1 und A_3 oder zwischen A_2 und A_3; je nachdem das erste oder das zweite eintritt, kann man dieselben Schlüsse für x_1 und x_3 oder für x_3 und x_2 wiederholen, die soeben für x_1 und x_2 gemacht worden sind. Die Entscheidung über das Eintreten des einen oder des anderen Falles wird durch das Signum von $y_3 = f(x_3)$ geliefert; ist $\operatorname{sgn}(y_1 \cdot y_3) = +1$, dann liegt ξ zwischen x_3 und x_2; ist dagegen $\operatorname{sgn}(y_1 \cdot y_3) = -1$, dann liegt ξ zwischen x_1 und x_3. In unserer Figur tritt der zweite Fall ein.

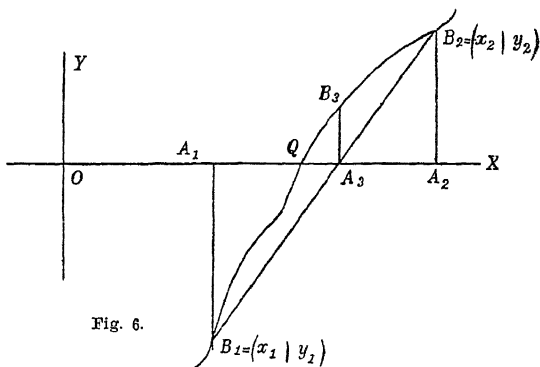



Fig. 6.

Die analytische Geometrie leitet für die Sehne $B_1 B_2$ die Gleichung

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

her; für A_3 ist $y = 0$ und $x = x_3$, also wandelt sich diese Gleichung um in

$$\frac{-y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1};$$

und daraus folgt als Lösung der linearen Gleichung für x_3

$$OA_3 = x_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}.$$

Beispielsweise betrachten wir

$$y = f(x) = x^3 + x - 1 = 0$$

und nehmen als Näherungswerte, zwischen denen eine Wurzel ξ liegt,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Dann wird

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 1;$$

daraus folgt

$$x_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} = 0{,}5; \qquad y_3 = x_3^3 + x_3 - 1 = -0{,}375;$$

und weiter

$$x_4 = \frac{x_3 y_2 - x_2 y_3}{y_2 - y_3} = 0{,}636; \quad y_4 = x_4^3 + x_4 - 1 = -0{,}100;$$

$$x_5 = \frac{x_4 y_2 - x_2 y_4}{y_2 - y_4} = 0{,}673; \quad y_5 = x_5^3 + x_5 - 1 = -0{,}022;$$

$$x_6 = \frac{x_5 y_2 - x_2 y_5}{y_2 - y_5} = 0{,}680; \quad y_6 = x_6^3 + x_6 - 1 = -0{,}005;$$

$$x_7 = \frac{x_6 y_2 - x_2 y_6}{y_2 - y_6} = 0{,}698, \quad y_7 = x_7^3 + x_7 - 1 = +0{,}038;$$

$$x_8 = \frac{x_6 y_7 - x_7 y_6}{y_7 - y_6} = 0{,}6821, \quad y_8 = x_8^3 + x_8 - 1 = -0{,}0005;$$

. . . .

Die Wurzel ξ liegt also zwischen 0,698 und 0,6821, so daß bei der Annahme des Mittelwertes $\frac{1}{2}(x_7 - x_8)$

$$\xi = \frac{0{,}698 - 0{,}6821}{2} = 0{,}69005$$

der Fehler

$$< \frac{0{,}698 + 0{,}6821}{2} = 0{,}00795$$

ist.

§ 70. Eine andere, nach Newton benannte Methode[1]) der numerischen Annäherung an eine Wurzel von $f(x) = 0$ knüpft an die Formel (7), § 32, an

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} + h^3 \frac{f'''(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Gesetzt man hätte für h einen Wert < 1 angenommen, so würden die Potenzen h^2, h^3, h^4, ... mit wachsendem Exponenten kleiner und kleiner werden; ja, wenn der Wert von h schon sehr klein ist, dürfen nicht nur jene Potenzen, sondern es darf auch die Summe

$$h^2 \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} + h^3 \frac{f'''(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

bei Annäherungsrechnungen vernachlässigt werden. Dadurch geht die obige Gleichung in die für h lineare

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x)$$

1) Newton, Brief an Oldenburg vom 13. Juni 1676; ferner dargelegt in der „Analysis per aequationes numero terminorum infinitas" und im „Methodus fluxionum". Übrigens hatte schon Vieta eine ganz ähnliche Methode angegeben.

über. Gesetzt nun, x_1 wäre ein Näherungswert für die genaue Wurzel ξ der Gleichung $f(x) = 0$, und zwar gelte

$$\xi = x_1 + h_1,$$

so folgt

$$f(\xi) = 0 = f(x_1) + h_1 f'(x_1)$$

und durch Auflösung dieser in h_1 linearen Gleichung

$$h_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Dieser Wert von h_1 wird zwar $(x_1 + h_1)$ nicht genau zu ξ machen, bei den erfüllten Voraussetzungen für die Annäherung immerhin aber in dem Werte

$$x_2 = x_1 + h_1$$

einen, gegenüber x_1 genaueren Näherungswert liefern. Wir haben somit einen zweiten Näherungswert

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)};$$

und mit ihm läßt sich die gleiche Operation wiederholen.

Wir wenden diese Methode gleichfalls auf das Beispiel des vorigen Paragraphen

$$y = f(x) = x^3 + x - 1 = 0$$

an. Dabei wird die Ableitung zu

$$f'(x) = 3x^2 + 1.$$

Wir nehmen $x_1 = 1$; daraus erhält man der Reihe nach

$$f(1) = +1, \qquad f'(1) = 4; \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{4} = 0{,}75;$$

$$f(0{,}75) = 0{,}1719, \qquad f'(0{,}75) = 2{,}6875; \qquad x_3 = 0{,}75 - 0{,}064 = 0{,}686;$$

$$f(0{,}686) = 0{,}0088, \qquad f'(0{,}686) = 2{,}4118; \qquad x_4 = 0{,}686 - 0{,}0036488 = 0{,}6823512;$$

§ 71. Dem Mangel dieser Methode, daß keine Genauigkeitsbestimmung für die berechneten Näherungswerte $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ geliefert wird, wie sie die Regula falsi gab, kann man abhelfen. Wir wollen aber hier nicht näher auf diese Frage eingehen, da ihre Beantwortung uns zu weit von unserem Wege abführen würde. Dagegen wollen wir noch erwähnen, daß weder bei der Regula falsi noch bei der Newtonschen Näherungsmethode die Form der Gleichung eine Rolle spielte. Demnach sind beide Methoden auch bei transzendenten Gleichungen verwendbar.

Wir behandeln als Beispiel die transzendente Gleichung

$$y = x + \sin x - 1 = 0$$

zuerst nach der Regula falsi.

Nehmen wir $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, so ergibt sich

$$y_1 = -1,\ y_2 = \sin 57^0\, 17'\, 49'' = 0{,}83952$$

und hieraus

$$x_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} = \frac{1}{0{,}83952 + 1} = 0{,}54363,$$

$$y_3 = 0{,}54367 + \sin 36^0\, 8' - 1 = 0{,}06150.$$

Eine Wurzel liegt zwischen x_1 und x_2. Es wird für sie

$$x_4 = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{y_3 - y_1} = \frac{0{,}54363}{1{,}06150} = 0{,}51215,$$

$$y_4 = 0{,}51215 + \sin 29^0\, 20'\, 40'' - 1 = 0{,}00205.$$

Eine Wurzel liegt zwischen x_1 und x_4. Es wird für sie

$$x_5 = \frac{x_1 y_4 - x_4 y_1}{y_4 - y_1} = \frac{0{,}51215}{1{,}00205} = 0{,}51112,$$

$$y_5 = 0{,}51112 + \sin 29^0\, 17'\, 6'' - 1 = 0{,}00027.$$

Wir wenden nun die Newtonsche Methode auf dieselbe Gleichung an. Dabei ist

$$y' = 1 + \cos x,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{1 + \cos x_1}.$$

Nehmen wir $x_1 = 1$, dann wird $y_1 = 0{,}83952$ und

$$x_2 = 0{,}45491,$$

$$y_2 = 1 + \cos 26^0\, 4' = -0{,}10567.$$

Geht man von diesem x_2 weiter, so folgt

$$x_3 = 0{,}45491 + \frac{0{,}10567}{1{,}89828} = 0{,}51057,$$

$$y_3 = 1 + \cos 29^0\, 15'\, 14'' = -0{,}00075$$

usw.

§ 72. Wir gehen jetzt zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten über und besprechen dabei zunächst zwei formal verschiedene, in Wirklichkeit aber übereinstimmende Methoden der Lösung solcher Gleichungen.

Sind mehrere Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten $a, b, c, \ldots, h$; $a_1, b_1, c_1, \ldots, h_1$; ... und den zu bestimmenden Unbekannten $x, y, z, t, \ldots$ gegeben, so daß

$$(2)\qquad \begin{cases} ax + by + cz + dt + \cdots = h, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t + \cdots = h_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t + \cdots = h_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

so können wir aus jeder von ihnen die gleiche Unbekannte, z. B. x, bestimmen, nämlich durch

$$(2\,\mathrm{a})\qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{a}(h - by - cz - dt - \cdots), \\ x &= \frac{1}{a_1}(h_1 - b_1 y - c_1 z - d_1 t \cdot \quad \cdot), \\ x &= \frac{1}{a_2}(h_2 - b_2 y - c_2 z - d_2 t - \cdots), \end{aligned}$$

Das ist stets möglich, da $a, a_1, a_2, \ldots$ unbestimmte Größen sind, die Divisionen durch diese Größen also gestattet sein müssen.

Setzen wir die Ausdrücke, die der zweiten, dritten, vierten, ... Gleichung entstammen, dem aus der ersten hergeleiteten gleich,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1}(h_1 - b_1 y - c_1 z - d_1 t - \cdots) &= \frac{1}{a}(h - by - cz - dt - \cdots), \\ \frac{1}{a_2}(h_2 - b_2 y - c_2 z - d_2 t - \cdots) &= \frac{1}{a}(h - by - cz - dt - \cdots), \end{aligned}$$

so entstehen Gleichungen, die auf die Gestalt

$$(3)\qquad \begin{cases} (ab_1 - a_1 b)y + (ac_1 - a_1 c)z + (a_1 d - a_1 d)t + \cdots = ah_1 - a_1 h, \\ (ab_2 - a_2 b)y + (ac_2 - a_2 c)z + (ad_2 - a_2 d)t + \cdots = ah_2 - a_2 h, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

gebracht werden können. Sie stimmen ihrer Form nach mit den Gleichungen (2) überein, sind aber der Anzahl nach um eine geringer und besitzen auch eine Unbekannte weniger als (2).

Mit den Gleichungen (3) können wir ebenso verfahren und kommen dabei auf ein System, das zwei Gleichungen und zwei Unbekannte weniger enthält als (2). So geht man weiter. Dabei können drei Fälle eintreten:

I. Die Anzahl der Gleichungen übertrifft die der Unbekannten. Dann stößt man bei der Weiterführung der Operationen auf Gleichheiten zwischen den Koeffizienten selbst; da diese als unbestimmte Größen angenommen sind, so werden diese Gleichheiten im allgemeinen nicht erfüllt sein, und das System (2) ist nicht lösbar.

II. Die Anzahl der Gleichungen ist der ihrer Unbekannten gleich. Dann stößt man im Laufe des angegebenen Verfahrens auf eine Gleichung von der Form

$$M \cdot t = N,$$

in der M und N aus den Koeffizienten von (2) zusammengesetzt sind. Hieraus folgt für die Unbekannte

$$t = \frac{N}{M}.$$

Geht man rückwärts, so erhält man, dem Gleichungssysteme (2a) entsprechend, eine Gleichung

$$z = \frac{1}{P}(Q + R \cdot t) = \frac{1}{P}\left(Q + \frac{NR}{M}\right),$$

durch die z bestimmt wird; usw. Man erhält somit ein Lösungssystem $x, y, z, t, \ldots$ von (2).

III. Die Anzahl der Gleichungen ist geringer als die der Unbekannten. Ist diese Differenz bei dem Systeme (2) gleich ν, so ist sie auch beim Systeme (3) gleich ν usf. Man stößt daher schließlich auf eine Gleichung mit $(\nu + 1)$ Unbekannten, etwa auf

$$Mt + M_1 u + M_2 v + \cdots = N$$

und sie liefert den Wert einer der Unbekannten durch die willkürlich bleibenden Werte der übrigen ν Unbekannten, z. B.

$$t = \frac{1}{M}(N - M_1 u - M_2 v - \cdots).$$

Geht man von hier aus wie in II rückwärts, so erkennt man, daß alle Lösungssysteme $x, y, z, \ldots, t$ noch ν willkürliche Größen $u, v, \ldots$ enthalten. Man sagt dann, (2) habe ν-fach unendlich viele Lösungen.

§ 73. Die im vorigen Paragraphen besprochene Methode der Lösung heißt die Kombinationsmethode. Von ihr unterscheidet sich die Substitutionsmethode dadurch, daß der aus der ersten Gleichung (2) erhaltene Wert von x, nämlich

$$x = \frac{1}{a}(h - by - cz - dt - \cdots)$$

in die übrigen Gleichungen eingesetzt (substituiert) wird:

$$\frac{a_1}{a}(h - by - cz - dt - \cdots) + b_1 y + c_1 z + d_1 t + \cdots = h_1,$$

$$\frac{a_2}{a}(h - by - cz - dt - \cdots) + b_2 y + c_2 z + d_2 t + \cdots = h_2,$$

. . . .

Das führt sofort wieder auf die Gleichungen (3).

Wir haben ausdrücklich die Größen $a, b, c, \ldots, h$; $a_1, b_1, c_1, \ldots, h_1$; ... als unbestimmte Größen angenommen, so daß unter ihnen keine Relationen bestehen. Ist diese Annahme nicht erfüllt, so kann die behandelte Methode hinfällig werden; es reicht z. B. schon aus, $a = 0$ anzunehmen, um das System (2a) unmöglich zu machen. Um alle bei dem System (2a) auftretenden Verhältnisse zu übersehen, wollen wir noch eine andere Methode besprechen, die nicht durch allmähliche Entfernung der einzelnen Unbekannten wirkt, sondern sofort zum Resultate gelangt.

§ 74. Wir gehen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y aus

$$
(4) \qquad \begin{aligned} ax + by &= c, \\ a_1x + b_1y &= c_1. \end{aligned}
$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung (4) mit b_1, die zweite mit $(-b)$ und addieren die Resultate. Diese Operationen bezeichnen wir durch

$$
\begin{aligned} ax + by &= c \quad & b_1, \\ a_1x + b_1y &= c_1 \mid & -b. \end{aligned}
$$

Das Resultat wird

$$
(ab_1 - a_1b)x = cb_1 - c_1b.
$$

Ferner bilden wir in ähnlicher Weise das System

$$
\begin{aligned} ax + by &= c \quad & -a_1 \\ a_1x + b_1y &= c_1 & a \end{aligned}
$$

und erhalten

$$
(ab_1 - a_1b)y = -ca_1 + c_1a.
$$

Beide Operationen können wir kürzer durch

$$
(5) \qquad \begin{aligned} ax + by &= c \quad & b_1 \quad & -a_1, \\ a_1x + b_1y &= c_1 & -b \quad & a \end{aligned}
$$

andeuten. Explizit wird dies

$$
(6) \qquad (ab_1 - a_1b)x = cb_1 - c_1b, \quad (ab_1 - a_1b)y = -ca_1 + c_1a.
$$

Die Gleichungen (6) folgen aus den Gleichungen (5). Ist x, y daher ein Lösungssystem von (5), dann befriedigt es auch (6). Also liefert die Lösung von (6) auch die von (5); aber es ist nicht a priori klar, daß nun auch umgekehrt jede Lösung von (6) gleichzeitig eine Lösung von (5) wird.

Ist

$$
(7) \qquad ab_1 - a_1b \neq 0,
$$

dann kann man die beiden Gleichungen (6) durch $(ab_1 - a_1 b)$ dividieren und erhält

$$x = \frac{cb_1 - c_1 b}{ab_1 - a_1 b}, \quad y = \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b}. \tag{8}$$

Hat das System (4) Lösungen, so sind sie durch (8) gegeben. Tragen wir die rechten Seiten von (8) in (4) ein, so werden die vorgelegten Gleichungen, wie man leicht sieht, auch befriedigt. Es gibt also in diesem Falle eine und nur eine Lösung (8) von (4).

Ist jedoch

$$ab_1 - a_1 b = 0, \tag{9}$$

so bilden wir die Kombinationen der Gleichungen (4)

$$\begin{aligned} a_1(ax + by - c) - a(a_1 x + b_1 y - c_1) &= ac_1 - a_1 c, \\ b_1(ax + by - c) - b(a_1 x + b_1 y - c_1) &= bc_1 - b_1 c. \end{aligned} \tag{10}$$

Kann man durch ein Wertepaar (x, y) die Gleichungen (4) befriedigen, so bringt dies die Klammern der beiden Gleichungen (10) zum Verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn auch die rechten Seiten Null sind. Es bestehen also bei Geltung von (9) nur dann Lösungen von (4), wenn auch

$$ac_1 - a_1 c = 0, \quad bc_1 - b_1 c = 0 \tag{11}$$

wird. Ist (11) nicht erfüllt, wohl aber (9), dann haben die Gleichungen (4) keine Lösungen.

Wir nehmen an, (9) und (11) seien erfüllt. Wenn dann auch nur eine der vier Größen a, b; a_1, b_1 von Null verschieden ist, so können wir, da die beiden Gleichungen (4) untereinander und die beiden Summanden ihrer linken Seiten untereinander vertauschbar sind, eine beliebige der vier Größen als von Null verschieden annehmen; wir setzen etwa

$$a \neq 0 \tag{12}$$

und folgern aus (9) $b_1 = \frac{a_1}{a} b$ und aus (11) $c_1 = \frac{a_1}{a} c$; dann ist

$$a_1 x + b_1 y - c_1 = \frac{a_1}{a}(ax + by - c);$$

d. h. die zweite Gleichung (4) wird durch jedes Wertepaar (x/y) befriedigt, das der ersten Gleichung (4) Genüge leistet. Nun kann man die erste Gleichung durch ein ganz beliebiges y und

(13) $\cdot by$

stets erfüllen. Folglich wird das Wertepaar

$$\left(\frac{c - by}{a}, y\right)$$

für jedes y ein Lösungssystem von (4), d. h. (4) hat eine einfach unendliche Schar von Lösungen.

Ist dagegen

$$a = 0, \quad b = 0; \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \tag{14}$$

so hat, wie (4) zeigt, dieses System nur dann Lösungen, wenn auch

$$c = 0, \quad c_1 = 0 \tag{15}$$

wird; dann gibt es eine doppelt unendliche Schar von Lösungen, indem nämlich jede Wahl von x und von y die Gleichungen befriedigt.

§ 75. Wir haben im vorigen Paragraphen alle möglichen Fälle, die bei einem Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten eintreten können, erledigt und so eine Anzahl von Einzelresultaten hergeleitet. Es kommt jetzt darauf an, diese in einem einfachen Gesamtresultate zu vereinigen. Hierzu dienen uns die im ersten Kapitel bereits eingeführten Begriffe der Determinanten, der Matrizen und des Ranges beider. Ja, durch sie gelingt es, den allgemeinen Fall eines Systems linearer Gleichungen in übersichtlicher Weise zu behandeln und damit ein Problem zu lösen, das C. G. J. Jacobi für außerordentlich verwickelt erklärte.[1])

Zunächst kehren wir zur Behandlung von (4) zurück:

Bei

$$ab_1 - a_1 b \neq 0$$

gibt es eine Lösung von (4). Hier haben die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \quad \text{und die Matrix} \quad \begin{Vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{Vmatrix}$$

den gleichen Rang zwei.

Bei der Annahme

$$ab_1 - a_1 b = 0, \quad ac_1 - a_1 c = 0, \quad bc_1 - b_1 c = 0$$
$$a \neq 0$$

gibt es ∞^1, d. h. eine einfach unendliche Schar von Lösungen. Hier ist die Determinante der Koeffizienten sowie auch die Matrix der Konstanten vom Range eins.

Beim Verschwinden aller Konstanten

$$a = b = c = a_1 = b_1 = c_1 = 0$$

gibt es ∞^2, d. h. eine doppelt unendliche Schar von Lösungen. Hier ist die Determinante der Koeffizienten sowie die Matrix der Konstanten vom Range 0.

1) „paullo prolixum negotium"; Jacobi, Werke III, S. 370.

Dagegen gibt es bei

$$ab_1 - a_1 b = 0,$$

$$ac_1 - a_1 c \quad \text{und} \quad bc_1 - b_1 c \text{ nicht gleichzeitig } = 0$$

keine Lösung. Hier ist die Determinante der Koeffizienten vom Range 1, da a, b, a_1, b_1 nicht sämtlich verschwinden, wohl aber $ab_1 - a_1 b = 0$ ist; die Matrix der Konstanten ist vom Range 2.

Auch bei der Annahme

$$a = b = a_1 = b_1 = 0,$$

$$c \text{ und } c_1 \text{ nicht gleichzeitig } = 0$$

gibt es keine Lösung. Hier ist die Determinante der Koeffizienten vom Range Null, die Matrix der Konstanten dagegen vom Range eins.

Die gewonnenen Resultate lassen sich in die einfachen Sätze zusammenfassen: Das System

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$$

hat dann und nur dann Lösungen, wenn der Rang r der Determinante der Koeffizienten

$$\begin{matrix} ; & b \\ {}_1 & b_1 \end{matrix}$$

gleich dem Range der Matrix

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{matrix}$$

der Konstanten ist. Die Anzahl der Lösungen ist dann ∞^{2-r}, wenn $\infty^0 = 1$ angenommen wird. In diesen Sätzen sind alle möglichen Einzelfälle enthalten.

§ 76. Wir wollen jetzt das Problem der Lösung eines linearen Systems in wirklicher Allgemeinheit behandeln, also alle möglichen Fälle berücksichtigen und erledigen. Gleichzeitig streifen wir die Beschränkung ab, daß die Zahl der Unbekannten mit der Zahl der vorgelegten Gleichungen übereinstimme.

Zur Abkürzung setzen wir

$$\text{(16)} \qquad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \equiv f_i; \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Das zu lösende Gleichungssystem wird dann

$$\text{(16a)} \qquad f_i = a_{i0} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

sein. Wir nehmen an, die Matrix der Koeffizienten

$$(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m} \end{pmatrix}$$

habe den Rang r, d. h. es gebe mindestens eine zu (A) gehörige, nicht verschwindende r-reihige Determinante, während sämtliche $(r+1)$-reihigen, also auch alle mehrreihigen verschwinden. Durch Vertauschung von Parallelreihen und durch abgeänderte Bezeichnung der Elemente $a_{\varkappa\lambda}$ kann man

$$\theta = |a_{ik}| \neq 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, \dots, r) \tag{17}$$

zu einer dieser nicht verschwindenden Determinante machen.

Nun bilden wir alle m Determinanten von der Gestalt

$$T_\alpha = \begin{vmatrix} f_\alpha & a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha r} \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_r & a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, m); \tag{18}$$

dieses T_α zerlegen wir in die Summe von n Produkten

$$x_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{\alpha 1} & a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha r} \\ a_{11} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} + \dots + x_r \cdot \begin{vmatrix} a_{\alpha r} & a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha r} \\ a_{1r} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{2r} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{rr} & a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

$$+ x_{r+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{\alpha, r+1} & a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha r} \\ a_{1, r+1} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{2, r+1} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r, r+1} & a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{vmatrix} a_{\alpha n} & a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha r} \\ a_{1n} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{2n} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{rn} & a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

$$(\alpha = 1, 2, 3, \dots, m)$$

und sehen, daß die auftretenden Determinanten sämtlich verschwinden, weil (A) vom Range r, und dabei jede der Determinanten $(r+1)$-reihig ist. Entwickelt man andererseits das T_α in (18) nach den Elementen der ersten Spalte, so erhält man unter Benutzung von (16), und da $\theta \neq 0$ ist, eine Gleichung von der Form

$$f_\alpha \theta + f_1 \theta_{\alpha 1} + f_2 \theta_{\alpha 2} + \dots + f_r \theta_{\alpha r} = 0,$$

und daher

$$f_\alpha = -\frac{1}{\theta}(f_1\theta_{\alpha 1} + f_2\theta_{\alpha 2} + \cdots + f_r\theta_{\alpha r}) \quad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, m), \tag{19}$$

d. h. bildet das Koeffizientensystem bei m linearen homogenen Funktionen eine Matrix vom Range r, so kann jede der m Funktionen durch r bestimmte unter ihnen linear und homogen dargestellt werden.

§ 77. Der Rang der Konstantenmatrix der Gleichungen

$$f_1 = a_{10},\ f_2 = a_{20},\ \ldots,\ f_m = a_{m0}, \tag{20}$$

nämlich der von

$$(A_0) = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kann wegen der oben gemachten Annahme, daß (A) vom Range r sei, nicht kleiner werden als r. Es seien nun $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ aus den Zahlen $1, 2, \ldots, m$ entnommene $(r+1)$ Indizes, und $\varrho, \sigma, \ldots, \tau$ seien aus den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ entnommene r Indizes. Mit diesen bilden wir alle Determinanten von $(r+1)$ Reihen der Form

$$\begin{vmatrix} f_\alpha & a_{\alpha\varrho} & a_{\alpha\sigma} & \ldots & a_{\alpha\tau} \\ f_\beta & a_{\beta\varrho} & a_{\beta\sigma} & \ldots & a_{\beta\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_\varepsilon & a_{\varepsilon\varrho} & a_{\varepsilon\sigma} & \ldots & a_{\varepsilon\tau} \end{vmatrix}, \tag{21}$$

die aus den gleichen Gründen wie T_α in (18) für jedes System der in den f enthaltenen x verschwindet. Gesetzt nun, man könnte die Gleichungen (17) durch passend gewählte Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ befriedigen, so folgt aus dem Verschwinden von (21), daß jede $(r+1)$-reihige Determinante von der Form

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha 0} & a_{\alpha\varrho} & a_{\alpha\sigma} & \ldots & a_{\alpha\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varepsilon 0} & a_{\varepsilon\varrho} & a_{\varepsilon\sigma} & \ldots & a_{\varepsilon\tau} \end{vmatrix} \tag{22}$$

verschwindet, daß also der Rang von (A_0) nicht größer sein kann als r. Da der Rang von (A_0) also weder kleiner noch größer als r sein kann, so ist er gleich r. Dafür, daß das System

$$f_1 = a_{10},\quad f_2 = a_{20},\quad \ldots,\quad f_m = a_{m0} \tag{20}$$

Lösungen besitzt, ist es notwendig, daß (A) und (A_0) von gleichem Range sind.

§ 78. Diese Bedingung ist, wie wir jetzt nachweisen wollen, für die Lösbarkeit von (20) auch hinreichend. Haben (A) und (A_0) denselben Rang r, und ist θ in (17) eine nicht verschwindende r-reihige Determinante aus (A), dann verschwinden (21) und (22); also auch ihre Kombination

$$\begin{vmatrix} f_\alpha - a_{\alpha 0} & a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha r} \\ f_1 - a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_r - a_{r0} & a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = (f_\alpha - a_{\alpha 0})\theta + (f_1 - a_{10})\theta_{\alpha 1} + \cdots + (f_r - a_{r0})\theta_{\alpha r} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Daraus ergibt sich für jedes $\alpha = 1, 2, 3, \dots, m$

$$f_\alpha - a_{\alpha 0} = -\frac{1}{\theta}[(f_1 - a_{10})\theta_{\alpha 1} + (f_2 - a_{20})\theta_{\alpha 2} + \cdots + (f_r - a_{r0})\theta_{\alpha r}] \tag{23}$$

und man erkennt: Sind durch irgendwelche Werte von $x_1, x_2, \dots, x_n$ die r Gleichungen

$$f_1 = a_{10}, \quad f_2 = a_{20}, \quad \dots, \quad f_r = a_{r0} \tag{16b}$$

erfüllt, und haben (A) und (A_0) den gleichen Rang r, so werden durch dieselben Werte von $x_1, x_2, \dots, x_n$ auch die Gleichungen

$$f_{r+1} = a_{r+1,0}, \quad f_{r+2} = a_{r+2,0}, \quad \dots, \quad f_m = a_{m0} \tag{16c}$$

erfüllt.

Durch dieses Resultat haben wir die gestellte Aufgabe vereinfacht: statt der m Gleichungen (20) braucht man nur die r Gleichungen (16b) zu lösen.

Wir schreiben nun (16b) in der Form nieder:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1r} x_r &= a_{10} - a_{1,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{1n} x_n, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2r} x_r &= a_{20} - a_{2,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{2n} x_n, \\ &\;\;\vdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{rr} x_r &= a_{r0} - a_{r,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{rn} x_n. \end{aligned} \tag{24}$$

Die Adjunkte von $a_{\varrho\sigma}$ in θ werde mit $\theta_{\varrho\sigma}$ bezeichnet. Multipliziert man dann die Gleichungen (24) der Reihe nach mit $\theta_{1\sigma}, \theta_{2\sigma}, \dots, \theta_{r\sigma}$ und berücksichtigt die Relationen § 6, (11) und (12), so folgt durch die Addition der r Produkte das Resultat

$$\begin{aligned} x_\sigma \theta = {} & (a_{10} - a_{1,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{1n} x_n)\theta_{1\sigma} + \cdots \\ & + (a_{r0} - a_{r,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{rn} x_n)\theta_{r\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \tag{25}$$

Wir beweisen, daß auch umgekehrt jedes System $x_1, x_2, \dots, x_n$,

das (16b) befriedigt, (16c) und damit (20) auflöst. Multipliziert man (16) mit $a_{\varrho\sigma}$ und addiert die Resultate für $\sigma = 1, 2, \ldots, r$, so entsteht

$$(a_{\varrho 1} x_1 + a_{\varrho 2} x_2 + \cdots + a_{\varrho r} x_r)\theta$$

$$(27)\quad \begin{cases} = (a_{10} - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n)(a_{\varrho 1}\theta_{11} + a_{\varrho 2}\theta_{12} + \cdots + a_{\varrho r}\theta_{1r}) + \cdots \\ + (a_{\varrho 0} - a_{\varrho,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{\varrho n}x_n)(a_{\varrho 1}\theta_{\varrho 1} + a_{\varrho 2}\theta_{\varrho 2} + \cdots + a_{\varrho r}\theta_{\varrho r}) + \cdots \\ + (a_{r0} - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n)(a_{\varrho 1}\theta_{r1} + a_{\varrho 2}\theta_{r2} + \cdots + a_{\varrho r}\theta_{rr}). \end{cases}$$

Die zweiten Faktoren aller rechts stehenden Produkte verschwinden wegen § 3, (11), mit Ausnahme des hingeschriebenen mittleren, für den die Gleichung

$$a_{\varrho 1}\theta_{\varrho 1} + a_{\varrho 2}\theta_{\varrho 2} + \cdots + a_{\varrho r}\theta_{\varrho r} = \theta$$

gilt. Da $\theta \neq 0$ ist, kann man durch θ dividieren; dabei geht nun (27) über in

$$a_{\varrho 1}x_1 + a_{\varrho 2}x_2 + \cdots + a_{\varrho r}x_r = a_{\varrho 0} - a_{\varrho, r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{\varrho n}x_n$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, m),$$

d. h. (20) wird erfüllt. In (27) treten die $(n-r)$ Unbekannten x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots, x_n$ auf die rechten Seiten ein.

Wir fassen die erhaltenen Resultate zusammen: Das System (20) von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten ist dann und nur dann lösbar, wenn die Konstantenmatrix (A_0) den gleichen Rang r mit der Koeffizientenmatrix (A) besitzt. In die Lösung gehen $(n-r)$ willkürliche Größen ein; die Anzahl der Lösungen kann daher als $(n-r)$-fach unendlich bezeichnet werden, wobei 0-fach unendlich gleich 1 genommen wird.

§ 79. Beispiel: Gegeben sei

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv 3x + 4y + 5z + t - 2u = 3, \\ f_2 &\equiv x - y + 3z + 2t + 3u = 5, \\ f_3 &\equiv 2x + 3y + z - t + u = 2, \\ f_4 &\equiv 6x + 6y + 9z + 2t + 2u = 10, \\ f_5 &\equiv 7x + 12y + 8z - t - 6u = 3. \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix des Systems

$$(A) \equiv \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 6 & 9 & 2 & 2 \\ 7 & 12 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

ist von dem gleichen Range $r = 3$, wie seine Konstantenmatrix

$$(A_0) \quad \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 9 & 2 & 2 & 10 \\ 7 & 12 & 8 & -1 & -6 & 3 \end{matrix}$$

folglich ist das vorgelegte System lösbar. Da die aus den Koeffizienten von f_1, f_2, f_3 gebildete Determinante

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 5 \\ & \cdot 1 & \\ & 3 & \end{matrix} \quad = 15 \neq 0$$

ist, so sind f_1, f_2, f_3 unabhängig voneinander, dagegen sind f_4 sowie f_5 linear und homogen durch f_1, f_2, f_3 darstellbar. Für diese Darstellung findet man

$$f_4 = f_1 + f_2 + f_3, \quad f_5 = 2f_1 - f_2 + f_3$$

und

$$f_4 - 10 = (f_1 - 3) + (f_2 - 5) + (f_3 - 2),$$
$$f_5 - 3 \;\; = 2(f_1 - 3) - (f_2 - 5) + (f_3 - 2).$$

Es ist daher nur nötig, x, y, z durch die Lösung von

$$3x + 4y + 5z = 3 - t + 2u,$$
$$x - y + 3z = 5 - 2t - 3u,$$
$$2x + 3y + z = 2 + t - u$$

als Funktionen von t und u zu bestimmen. Die erhaltenen Werte befriedigen dann auch die beiden letzten Gleichungen des vorgelegten Systems. Es ergibt sich

$$15x = 59 + 5t - 70u,$$
$$15y = -28 + 5t + 35u,$$
$$15z = -4 - 10t + 20u.$$

§ 80. Einen besonders wichtigen Fall der besprochenen Theorie liefern die homogenen linearen Gleichungen, d. h. die, bei denen sämtliche Größen $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{m0}$ gleich Null sind,

$$f_i \equiv a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Lösbarkeitsbedingung, daß (A_0) denselben Rang hat wie (A), ist hier stets erfüllt, da alle Determinanten, bei denen die Elemente

einer Spalte den zweiten Index 0 haben, ohne weiteres verschwinden. Die Gleichungen (27) gehen dabei in die einfacheren über

$$x_\sigma \cdot \theta = -(a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n)\theta_{1\sigma} - \cdots \\ - (a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n)\theta_{r\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, r). \tag{27a}$$

Ist $r = n$, dann tritt kein x auf die rechte Seite dieser Gleichung, und man kommt zu der identischen banalen Lösung des Systems

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \quad 0.$$

Damit außer ihr noch andere, nicht verschwindende Lösungen vorhanden seien, muß der Rang r von (A) kleiner als n werden. Für $m = n$ muß also

$$|a_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten.

Ist $r = n - 1$, so handelt es sich um ein System von r Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} &= 0, \end{aligned}$$

bei dem die Determinante der Koeffizienten von $x_1, x_2, \ldots, x_r$

$$\theta = \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$$

nicht verschwindet.

Aus (26a) folgt

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \theta &= -x_n(a_{1n}\theta_{11} + a_{2n}\theta_{21} + \cdots + a_{rn}\theta_{r1}), \\ x_2 \cdot \theta &= -x_n(a_{1n}\theta_{12} + a_{2n}\theta_{22} + \cdots + a_{rn}\theta_{r2}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

oder in anderer Form unter Einführung einer Determinante geschrieben

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \theta &= -x_n \cdot |a_{hn}\, a_{h2}\, a_{h3} \ldots a_{hr}|, \\ x_2 \cdot \theta &= -x_n \cdot |a_{h1}\, a_{hn}\, a_{h3} \ldots a_{hr}|, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite jeder der r-reihigen Determinanten die h^{te} Zeile angegeben ist. Man kann dieses Resultat noch vereinfacht darstellen. Es seien $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots, a_{nn}$ willkürliche Größen, ferner sei

$$T = |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und $T_{\alpha\beta}$ die Adjunkte von $a_{\alpha\beta}$ in T. Dann wird

$$x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_n = T_{n1} : T_{n2} : T_{n3} : \cdots : T_{nn}. \tag{27}$$

Beispiel: Für

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 0, \\ 2x - y + 5z &= 0, \end{aligned} \qquad \theta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

wird

$$T = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 14a_{31} - 7a_{32} - 7a_{33},$$

$$x : y : z = 14 : -7 : -7 = 2 : -1 : -1,$$

$$x = 2t, \quad y = -t, \quad z = -t,$$

wo t eine beliebige Größe ist.

§ 81. Es seien m lineare homogene Funktionen von n Unbestimmten vorgelegt

$$(16) \qquad f_i \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Die $f_1, f_2, \ldots, f_m$ bilden ein System voneinander unabhängiger Funktionen, oder in etwas lässigerem Ausdruck ein unabhängiges System, falls keine identisch erfüllte Relation

$$\varkappa_1 f_1 + \varkappa_2 f_2 + \cdots + \varkappa_m f_m = 0$$

besteht, in der die $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m$ Konstanten sind, die nicht sämtlich verschwinden. Die Existenz einer solchen Relation fordert, daß, wenn man ihre linke Seite nach den x anordnet, die Koeffizienten der einzelnen x gleich Null werden. Daher darf das System linearer Gleichungen in den $\varkappa$

$$\begin{aligned} a_{11}\varkappa_1 + a_{21}\varkappa_2 + \cdots + a_{m1}\varkappa_m &= 0, \\ a_{12}\varkappa_1 + a_{22}\varkappa_2 + \cdots + a_{m2}\varkappa_m &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\varkappa_1 + a_{2n}\varkappa_2 + \cdots + a_{mn}\varkappa_m &= 0 \end{aligned}$$

nur die identische Lösung $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \cdots = \varkappa_m = 0$ haben, falls die f ein unabhängiges System bilden. Dies aber tritt nach den Untersuchungen der vorigen Paragraphen dann und nur dann ein, wenn der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gleich m ist, und dazu ist $n \geqq m$ notwendig, d. h.: m lineare homogene Funktionen von weniger als m Variablen können kein

unabhängiges System bilden. Ebenso sieht man: m lineare homogene Funktionen von m Variablen bilden dann und nur dann ein unabhängiges System, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten nicht verschwindet.

§ 82. I. Wir beweisen ferner den folgenden Satz:

Ist $m < n$, und bilden die $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ein unabhängiges System linearer, homogener Funktionen der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so kann man m der Variablen x durch die übrigen $(n-m)$ und durch die m Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ linear und homogen ausdrücken. Denn aus ihrer Unabhängigkeit folgt, daß der Rang der Matrix der f gleich m ist. Es kann daher wie oben

$$\theta = |a_{ik}| \neq 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

angenommen werden, und daraus ergibt sich, daß das Gleichungssystem

$$(28) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = f_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m = f_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{mn}x_n \end{cases}$$

für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine und nur eine Lösung hat, die wir andeuten wollen durch

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(x_{m+1}, \ldots, x_n; f_1, f_2, \ldots, f_m) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

wobei die φ_α lineare homogene Funktionen der in der Klammer angegebenen Argumente sind. Damit ist die Richtigkeit des letzten Satzes bewiesen.

Aus diesem Theorem folgt das weitere: II. Bilden die m Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ein unabhängiges System, so ist es stets möglich, die n Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so zu wählen, daß

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n; f_1, f_2, \ldots, f_m$$

beliebig vorgeschriebene Werte annehmen. In der Tat, sind die vorgeschriebenen Werte der x bzw. der f

$$\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m,$$

so setzen wir zunächst für $x_{m+1}, \ldots, x_n$ die vorgeschriebenen Werte $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n$ ein; und dann in (28) für $f_1, f_2, \ldots, f_m$ die vorgeschriebenen Werte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$. Dadurch werden in dem Systeme (28) die rechten Seiten bekannt, und das System selbst wird wegen $\theta \neq 0$ auflösbar. Stellt sich dabei für die Unbekannten x ein Wertsystem

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \ldots, x_m = \xi_m$$

als Lösung heraus, so genügt es, allgemein

$$x_\alpha = \xi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

zu setzen, um die Forderung des Satzes zu befriedigen.

Weiter beweisen wir: III. Verschwindet eine homogene lineare Funktion $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der n Variablen x für alle Wertsysteme derselben, die das unabhängige System

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

zu Null machen, so kann man

$$(29) \qquad h \equiv \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_m f_m$$

setzen, wobei die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ Konstanten bedeuten. Man kann nämlich zunächst h durch alle $x_1, x_2, \ldots, x_m$ linear und homogen ausdrücken; und dann nach dem ersten Satze dieses Paragraphen durch $f_1, f_2, \ldots, f_m$; $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Nach dem zweiten Satze dieses Paragraphen können dann alle $f_1, f_2, \ldots, f_m$ und alle $x_{m+1}, \ldots, x_n$ mit Ausnahme eines einzigen x_α zum Verschwinden gebracht werden. Wegen der über h gemachten Annahmen birgt dies einen Widerspruch, d. h. auch die Größe x_α kommt in der Darstellung nicht vor, und das gleiche gilt von jedem x der Reihe $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Somit kommt man auf die Gleichung (28).

IV. Verschwinden alle homogenen linearen Funktionen h_β des Systems

$$h_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \mu)$$

für alle Wertsysteme der x_i, die sämtliche Funktionen eines unabhängigen Systems

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

zu Null machen, so ist die Anzahl der unabhängigen h_β kleiner als m. Zunächst kann man nach dem vorigen Satze

$$(30) \qquad h_\beta = \alpha_{1\beta} f_1 + \alpha_{2\beta} f_2 + \cdots + \alpha_{m\beta} f_m \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu)$$

setzen, die f als Variable an Stelle der x ansehen und auf das System (30) dann den vorletzten Satz aus § 81 anwenden. Auf diesem Wege erhält man den Beweis des letzten obigen Theorems.

Sechstes Kapitel.

Resultanten und Diskriminanten.

§ 83. Als Anwendung der im vorigen Kapitel besprochenen Lösung eines Systems linearer Gleichungen wollen wir eine bereits früher behandelte Frage nochmals in Erwägung ziehen, nämlich die nach der Existenz eines gemeinsamen Teilers zweier ganzen Funktionen einer Veränderlichen.

Es seien zwei ganze Funktionen von x vorgelegt

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m \\ g(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n \end{cases} \qquad (m \geqq n);$$

es soll untersucht werden, wann beide einen gemeinsamen Faktor ersten Grades $(\alpha x + \beta)$ oder, was das gleiche besagt, eine gemeinsame Wurzel $x_1 = -\beta : \alpha$ besitzen. Aus

$$f(x) = (\alpha x + \beta) f_1(x), \quad g(x) = (\alpha x + \beta) g_1(x)$$

folgt

$$(2)\qquad f(x) g_1(x) - f_1(x) g(x) \equiv 0,$$

wo f_1 vom Grade $(m-1)$ und g_1 vom Grade $(n-1)$ ist. Umgekehrt folgt aus dem Bestehen von (2), daß die beiden Funktionen f und g einen Faktor mindestens vom ersten Grade gemeinsam haben. Denn der aus (2) folgende Quotient

$$(2\text{a})\qquad g_1(x) = \frac{f_1(x) \cdot g(x)}{f(x)}$$

zeigt, daß f in dem Produkt $f_1 \cdot g$ aufgeht, daß also jeder irreduktible Faktor von f mindestens in gleicher Multiplizität im Zähler vorkommt wie im Nenner. Hebt man nun alle, den Funktionen f_1 und f gemeinsamen Faktoren weg, so muß der Gradzahlen wegen, die diese Funktionen haben, von f mindestens ein Faktor ersten Grades zurückbleiben, der dann in g aufgeht. Die Frage nach einem gemeinsamen Faktor ersten Grades läuft daher auf die Frage hinaus, ob eine Gleichung von der Gestalt (2) hergestellt werden kann oder nicht.

Um dies zu entscheiden, setzen wir zwei Funktionen mit $(m+n)$ noch unbekannten Koeffizienten p und q an:

$$(3)\qquad \begin{cases} f_1(x) = p_0 x^{m-1} + p_1 x^{m-2} + \cdots + p_{m-2} x + p_{m-1}, \\ g_1(x) = q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \cdots + q_{n-2} x + q_{n-1}, \end{cases}$$

und bilden den Ausdruck für die linke Seite der Gleichnng (2). Dabei entsteht eine Gleichung vom Grade $(m+n-1)$, nämlich

$$(a_0 q_0 - b_0 p_0) x^{m+n-1} + (a_1 q_0 + a_0 q_1 - b_1 p_0 - b_0 p_1) x^{m+n-2} + \cdots$$
$$+ (a_m q_{n-2} + a_{m-1} q_{n-1} - b_n p_{m-2} - b_{n-1} p_{m-1}) x + (a_m q_{n-1} - a_n p_{m-1}) \equiv 0.$$

Soll diese identisch, d. h. für jeden Wert von x erfüllt sein, so müssen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x gleich Null werden, und es muß Werte für $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$; q_0, q_1, q_2, q_{n-1} geben, die, ohne sämtlich zu verschwinden, das folgende System linearer Gleichungen erfüllen:

$$\begin{array}{lll}
a_0 q_0 & -b_0 p_0 & = d_0, \\
a_1 q_0 + a_0 q_1 & -b_1 p_0 - b_0 p_1 & = d_1, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_m q_0 + a_{m-1} q_1 + \cdots + a_0 q_m & & = d_m, \\
\quad a_m q_1 + \cdots + a_1 q_m & & = d_{m+1}, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\qquad a_m q_{n-2} + a_{m-1} q_{n-1} & -b_n p_{m-2} - b_{n-1} p_{m-1} & = d_{m+n-2}, \\
\qquad\quad a_m q_{n-1} & -b_n p_{m-1} & = d_{m+n-1},
\end{array}$$

wenn in ihm alle $d_\varkappa$ gleich Null gesetzt werden, das Gleichungssystem also homogen wird.

Nach § 80 muß die Koeffizientendeterminante dieses Systems verschwinden, um die banale identische Lösung auszuschalten. Macht man in der Determinante die Zeilen zu Spalten und umgekehrt, so nimmt die $(m+n)$-reihige Determinante die Gestalt an

$$(4) \qquad \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & a_0 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_m \\
b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_n
\end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (n \text{ Zeilen}) \\ \\ (m \text{ Zeilen}). \end{array}$$

Wir wollen diese $(m+n)$-reihige Determinante die Resultante von f und g nennen und durch $R(f, g)$ oder, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, durch R bezeichnen. Das Verschwinden von R ist charakteristisch dafür, daß f und g einen Faktor gemein haben. Die Notwendigkeit der Bedingung $R = 0$ haben wir eben gezeigt; daß sie hinreichend sei, folgt so: Ist $R \neq 0$, dann kann man die $p_\varkappa$ und die $q_\varkappa$ in dem letzten obigen Gleichungssystem so bestimmen, daß die $d_\varkappa$ die Werte annehmen

$$d_0 = d_1 = d_2 = \cdots = d_{m+n-2} = 0; \quad d_{m+n-1} = 1,$$

daß also

$$f(x) \cdot g_1(x) - g(x) f_1(x) = 1$$

wird; die letzte Gleichung zeigt, daß f und g teilerfremd sind.

§ **84.** Wir nehmen nun an, es sei $R = 0$. Dann setzen wir mit noch unbestimmten Koeffizienten zwei Funktionen an

$$f_2(x) = s_0 x^{m-2} + s_1 x^{m-3} + \cdots + s_{m-3} x + s_{m-2},$$
$$g_2(x) = t_0 x^{n-2} + t_1 x^{n-3} + \cdots + t_{n-3} x + t_{n-2}$$

und bilden ähnlich wie eben in § 83 den Ausdruck

$$(5) \quad f(x) g_2(x) - g(x) f_2(x) \equiv e_0 x^{m+n-2} + e_1 x^{m+n-3} + \cdots + e_{m+n-2},$$

wobei für die Koeffizienten $e_\varkappa$ gemäß (5)

$$\begin{array}{lll} a_0 t_0 & - b_1 s_0 & = e_0, \\ a_1 t_0 + a_0 t_1 & - b_1 s_0 - b_0 s_1 & = e_1, \\ & & \\ a_m t_{n-2} \cdot & b_n s_{m-2} = & e_{m+n-2} \end{array}$$

zu setzen ist. Dies fassen wir als ein System von $(m + n - 1)$ linearen Gleichungen in den $(m + n - 2)$ Unbekannten $t_\varkappa$ und $s_\varkappa$ auf. Sehen wir von der letzten Gleichung des Systems ab, dann bleiben $(m + n - 2)$ Gleichungen in ebenso vielen Unbekannten zurück, deren $(m + n - 2)$-reihige Koeffizientendeterminante nach Vertauschung von Zeilen und Spalten die Gestalt

$$R_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & a_m & \\ 0 & a_0 & \cdot & a_m & \\ & & & & \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (n-1) \text{ Zeilen} \\ \\ (m-1) \text{ Zeilen} \end{array}$$

annimmt. R_1 entsteht aus R durch Tilgung der letzten beiden Spalten sowie der letzten Zeile der Elemente $a_\varkappa$ und der letzten der Elemente b_λ. Es ist also R_1 ein Minor von R.

Ist $R_1 \neq 0$, dann kann man die $s_\varkappa$ und die $t_\varkappa$ so bestimmen, daß

$$e_{m+n-4} = 0; \quad e_{m+n-3} = 1,$$

also

$$f(x) g_2(x) - g(x) f_2(x) = x + e_{m+n-2}$$

wird. Diese Gleichung zeigt, daß f und g keinen gemeinsamen Faktor von höherem als dem ersten Grade haben können; und wegen $R = 0$ haben sie auch wirklich einen solchen. Es liefert

$$R = 0; \quad R_1 \neq 0$$

die charakteristischen Bedingungen dafür, daß die beiden

Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinsamen Teiler genau vom ersten Grade besitzen.

§ 85. Ist neben $R = 0$ auch $R_1 = 0$, dann kann man durch passende Werte von $s_\varkappa$ und $t_\varkappa$, die nicht sämtlich verschwinden, die $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{m+n-3}$ zu Null machen. (5) geht dabei über in

$$f(x)g_2(x) - g(x)f_2(x) = e_{m+n-2}. \tag{6}$$

Die rechte Seite muß gleich Null werden; denn da f und g wegen $R = 0$ einen gemeinsamen Teiler haben, teilt dieser auch die rechte Seite, und das ist nur möglich, wenn die Konstante e_{m+n-2} verschwindet. Danach ergibt sich

$$g_2(x) = \frac{f_2(x)g(x)}{f(x)}. \tag{6 a}$$

Behandelt man diese Gleichung wie die entsprechende (2 a), so sieht man: Es liefern die beiden Relationen

$$R = 0, \quad R_1 = 0 \tag{7}$$

die charakteristischen Bedingungen dafür, daß die beiden Funktionen f und g einen gemeinsamen Teiler mindestens vom zweiten Grade besitzen.

§ 86. Wir nehmen nun (7) als erfüllt an und bilden zwei neue Funktionen f_3 und g_3 mit noch unbestimmten Koeffizienten

$$\begin{aligned} f_3(x) &= i_0x^m + i_1x^{m-4} + \quad + i_{m-4}x + i_{m-3}, \\ g_3(x) &= k_0x^{n-3} + k_1x^{n-4} + \quad + k_{n-4}x + k_{n-3} \end{aligned}$$

und aus ihnen

$$f(x)g_3(x) - g(x)f_3(x) = l_0x^{m+n-3} + \cdots + l_{m+n-3}.$$

Drücken wir dann die Größen $l_0, l_1, \ldots, l_{m+n-}$ durch die i und die k aus, so entstehen $(m + n - 2)$ lineare Gleichungen zwischen den $(m + n - 4)$ Unbekannten i und k. Sehen wir von den beiden letzten Gleichungen ab, d. h. von denen, die l_{m+n-4} und l_{m+n-3} bestimmen, so bleibt ein System von $(m + n - 4)$ linearen Gleichungen in ebenso vielen Unbekannten zurück. Ihr Koeffizientensystem führt zu der Determinante

$$R_2 = \left|\begin{matrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_m & 0 & \ldots \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{m-1} & a_m & \ldots \\ . & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n & 0 & \ldots \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{n-1} & b_n & \ldots \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}\right| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}(n-2) \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}(m-2) \text{ Zeilen.} \end{matrix} \tag{8}$$

Ist $R_2 \neq 0$, dann kann über die i und die k so verfügt werden, daß

$$l_0 = l_1 = \cdots = l_{m+n-6} = 0, \quad l_{m+n-5} = 1,$$

also

$$f(x) g_3(x) - g(x) f_3(x) = 1 \cdot x^2 + l_{m+n-4} x + l_{m+n-3}$$

wird. Die letzte Gleichung zeigt in Verbindung mit (7): Es liefern

$$R = 0, \quad R_1 = 0, \quad R_2 \neq 0$$

die charakteristischen Bedingungen dafür, daß f und g einen gemeinsamen Teiler genau vom Grade 2 besitzen.

Ist dagegen $R_2 = 0$, dann kann man, ohne alle i und k gleich Null anzunehmen, so über sie verfügen, daß

$$l_0 = l_1 = \cdots = l_{m+n-5} = 0,$$

also

$$f(x) g_3(x) - g(x) f_3(x) = l_{m+n-4} x + l_{m+n-3}$$

wird. Nach (7) haben f und g einen gemeinsamen Teiler von mindestens dem zweiten Grade; durch ihn müßte die rechte Seite der letzten Gleichung teilbar sein. Das geht nur dann, wenn

$$l_{m+n-4} = 0, \quad l_{m+n-3} = 0,$$

also

$$f(x) g_3(x) - g(x) f_3(x) = 0$$

ist. Diese Gleichung behandeln wir wie oben (2) und (6); wir sehen: Es liefern

$$R = 0, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0$$

die charakteristischen Bedingungen dafür, daß die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinsamen Teiler mindestens vom dritten Grade besitzen.

Fährt man in gleicher Art fort, so erkennt man: Bedeutet

$$(9) \qquad R_\varkappa = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n & 0 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} (n-\varkappa) \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} (m-\varkappa) \text{ Zeilen} \end{matrix} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots),$$

dann liefert

$$(10) \qquad R = 0, \quad R_1 = 0, \quad \ldots, \quad R_{\alpha-1} = 0, \quad R_\alpha \neq 0$$

die charakteristischen Bedingungen dafür, daß die beiden Funktionen

$$f(x) \quad \text{und} \quad g(x)$$

einen gemeinsamen Teiler genau vom Grade α besitzen.

Beispiel: Für $m = n = 2$ ergibt sich

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_0^2 b_2^2 + a_2^2 b_0^2 - a_0 a_1 b_1 b_2 - a_1 a_2 b_0 b_1 \\ & + a_0 a_2 b_1^2 + a_1^2 b_0 b_2 - 2 a_0 a_2 b_0 b_2; \end{aligned}$$

$$R_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = a_0 b_1 - a_1 b_0.$$

§ 87. Das für $m = n = 2$ ausgerechnete R erweist sich in den Koeffizienten a, b als isobar vom Gewichte 4, und das R_1 als isobar vom Gewichte 1. Dieser Satz läßt sich auf beliebige m und n erweitern. Setzt man $a_0, a_1 \varrho, a_2 \varrho^2, \ldots, a_m \varrho^m$ statt $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, und $b_0, b_1 \varrho, b_2 \varrho^2, \ldots, b_n \varrho^n$ statt $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ in R ein, so entsteht

$$R' = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \varrho & a_2 \varrho^2 & \ldots & a_m \varrho^m & 0 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 \varrho & \ldots & a_{m-1} \varrho^{m-1} & a_m \varrho^m & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 \varrho & b_2 \varrho^2 & \ldots & b_n \varrho^n & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Zieht man nun in R' aus der zweiten Spalte ϱ^1 als Faktor heraus, aus der dritten $\varrho^2, \ldots$, aus der $(m+n)^{\text{ten}}$ Spalte ϱ^{m+n-1}, so erscheinen die Elemente der ersten Zeile in den a mit ϱ^0 multipliziert, die der zweiten, der dritten, ..., der n^{ten} bzw. mit $\varrho^{-1}, \varrho^{-2}, \ldots, \varrho^{-n+1}$; und ähnlich die der Zeilen in den Elementen b. Zieht man diese Potenzen des Faktors ϱ aus den Zeilen heraus, so folgt für die Determinante R' der Wert

$$\begin{aligned} R' &= \varrho^{\binom{m+n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n}{2}} \cdot R \\ &= \varrho^{mn} R \end{aligned}$$

Genau in der gleichen Art wird bewiesen, daß

$$\begin{aligned} R'_\alpha &= \varrho^{\binom{m+n-2\alpha}{2} - \binom{m-\alpha}{2} - \binom{n-\alpha}{2}} \cdot R_\alpha \\ &= \varrho^{(m-\alpha)(n-\alpha)} \cdot R_\alpha . \end{aligned}$$

Ferner erkennt man sofort die Homogeneität aller R_α von der Dimension $(n - \alpha)$ in den a und von der Dimension $(m - \alpha)$ in den b

§ 88. Nehmen wir für g die Ableitung von f, also

$$(11)\quad \begin{cases} f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m, \\ g(x) = m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + (m-2) a_2 x^{m-3} + \cdots + a_{m-1}, \end{cases}$$

so folgt aus der Betrachtung der ersten Spalte der Determinante (4), daß $R(f, f')$ durch a_0 teilbar ist. Wir setzen

$$(12)\qquad \frac{1}{a_0} R(f, f') = D(f) = D$$

und bezeichnen dies D als Diskriminante von f. Aus der Bedeutung von D folgt: Das Verschwinden von $D(f)$ ist charakteristisch dafür, daß die Funktion $f(x)$ einen Faktor von mindestens der Multiplizität 2 besitzt. D ist homogen und isobar in den Koeffizienten von $f(x)$.

Man kann die Diskriminante auch in der Gestalt einer Determinante von $2(n-1)$ Reihen darstellen. Um dies zu bewirken, gehen wir von der Determinantendarstellung der Resultante $R(f, f')$ aus

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & \ldots \\ 0 & a_0 & & \ldots & a_{n-1} & & \\ & & & & & & \\ n a_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \ldots & 0 & 0 & \\ 0 & n a_0 & (n-1)a_1 & \ldots & a_{n-1} & 0 & \end{vmatrix} \begin{matrix} (n-1) \text{ Zeilen} \\ \\ \\ n \text{ Zeilen.} \end{matrix}$$

Wir multiplizieren die ersten $(n-1)$ Zeilen dieser Form des D mit n und subtrahieren darauf von jedem Elemente der α^{ten} Zeile $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ das entsprechende Glied der $(\alpha + 1 - n)^{\text{ten}}$ Zeile. Das ergibt

$$D = -\frac{1}{n^{n-1} a_0} \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 2a_2 & \ldots & n a_n & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & & \ldots & (n-1)a_{n-1} & n a_n & \ldots \\ & & & & & & \\ n a_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \ldots & 0 & 0 & \\ 0 & n a_0 & (n-1)a_1 & \ldots & a_{n-1} & 0 & \end{vmatrix} \begin{matrix} (n-1) \text{ Zeilen} \\ \\ \\ n \text{ Zeilen.} \end{matrix}$$

Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der ersten Spalte, so folgt

$$D = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{n-2}} R(f_1, f_2) = \frac{1}{n^{n-1}} R(f_2, f_1),$$

worin für die Funktionen f_1 und f_2

$$f_1(x) \equiv a_1 x^{m-1} + 2 a_2 x^{m-2} + 3 a_3 x^{m-3} + \cdots + m a_m$$

bzw.

$$f_2(x) \equiv m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \cdots + 2 a_{m-2} x + a_{m-1}$$

zu setzen ist.

Für die Funktion zweiten Grades

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

entsteht dabei

$$D = 4 a_0 a_2 - a_1^2;$$

für die Funktion dritten Grades

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

entsteht ebenso

$$D = 27 a_0^2 a_3^2 - 18 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - a_1^2 a_2^2.$$

§ 89. Wir nehmen nun das Hauptergebnis der beiden folgenden Kapitel als bereits bewiesen zum Zwecke einer neuen Darstellung von R und von D voraus. Diesem Ergebnis zufolge kann man

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots \pm a_m = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$
$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots \pm b_n = b_0(x - x_1')(x - x_2') \cdots (x - x_n')$$

setzen, wo $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Wurzeln von $f(x) = 0$, und $x_1', x_2', x_3', \ldots$ die von $g(x) = 0$ bedeuten. Vergleicht man die Koeffizienten gleichhoher Potenzen von x in jeder der beiden Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$, so zeigt sich, daß alle Quotienten $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}, \cdots$ ganz und ganzzahlig durch die Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von $f(x) = 0$, und ebenso die Quotienten $\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \frac{b_3}{b_0}, \ldots$ durch die Wurzeln $x_1', x_2', x_3', \ldots$ von $g(x) = 0$ ganz und ganzzahlig darstellbar sind.

Nun besteht die Resultante $R(f, g)$ nur aus Potenzprodukten von der Form

$$\text{Cst.}\ a_0^{\varkappa_0} a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \ldots b_0^{\lambda_0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots,$$

wobei wegen der Homogeneität von R in den a und den b den Bedingungen

$$\varkappa_0 + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots = n, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = m$$

genügt werden muß. Diese Bedingungen ergeben

$$a_0^{\varkappa_0} = a_0^n a_0^{-\varkappa_1} a_0^{-\varkappa_2} a_0^{-\varkappa_3} \ldots,$$

und das obige Potenzprodukt wird zu

$$\text{Cst.} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\varkappa_1} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\varkappa_2} \cdots \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{b_2}{b_0}\right)^{\lambda_2} \cdots [a_0^n b_0^m].$$

Hieraus ersieht man, daß

$$R(f, g) = [a_0^{+n} b_0^{+m}] \varphi(x, x')$$

ist, wobei $\varphi(x, x')$ eine ganze Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_1', x_2', \ldots$ bedeutet, während die a und die b sämtlich verschwunden sind oder wenigstens nicht mehr explizit auftreten. Gemäß der Bedeutung von $R(f, g)$ verschwindet R und damit φ für jede Annahme

$$x_\alpha = x_\beta' \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, 3, \ldots, m \\ \beta = 1, 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Also ist

$$a_0^{-n} b_0^{-m} R(f, g)$$

durch alle $m \cdot n$ Wurzelfaktoren $(x_\alpha - x_\beta')$ teilbar, und daher

$$R(f, g) \quad \text{durch} \quad a_0^n b_0^m \prod_{\alpha, \beta} (x_\alpha - x_\beta') \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, m \\ \beta = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Um den Quotienten zu finden, setzen wir

$$\begin{aligned} a_0^n b_0^m \prod_{\alpha, \beta} (x_\alpha - x_\beta') &= a_0^n \prod_\alpha [b_0 (x_\alpha - x_1')(x_\alpha - x_2') \cdots (x_\alpha - x_n')] \\ &= a_0^n \prod_\alpha g(x_\alpha) = (-1)^{mn} b_0^m \prod_\beta [a_0 (x_\beta' - x_1) \cdots (x_\beta' - x_m)] \\ &= (-1)^{mn} b_0^m \prod_\beta f(x_\beta'). \end{aligned}$$

Da $g(x_\alpha)$ homogen von erster Dimension in $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ist, und $f(x_\beta')$ homogen von erster Dimension in den $a_0, a_1, \ldots, a_m$, so folgt aus den Schlußformeln der letzten Zeilen, daß die links stehende Funktion in den $a_0, a_1, \ldots, a_m$ homogen von n^{ter} Dimension und in den $b_0, b_1, \ldots, b_n$ homogen von m^{ter} Dimension wird. Nun hat $R(f, g)$ die gleichen Eigenschaften der Homogeneität; daher ist der gesuchte Quotient eine numerische Konstante. Diese bestimmt sich durch Vergleichung zweier, einander literal gleicher Glieder auf beiden Seiten. Dazu wählen wir aus der Determinante R den Summanden, der das Produkt der Elemente der Hauptdiagonale ist, d. h. $a_0^n b_n^m$. Der ihm literal gleiche Summand der rechten Seite ist

$$\begin{aligned} &a_0^n [b_0 (-x_1')(-x_2') \cdots (-x_n')]^m \\ &= a_0^n [(-1)^n b_0 x_1' x_2' \ldots x_n']^m = a_0^n b_n^m; \end{aligned}$$

so daß der Quotient gleich der Einheit und das Schlußresultat

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} R(f, g) &= a_0^n b_0^m \prod_{\alpha, \beta} (x_\alpha - x_\beta') \\ &= a_0^n \prod_\alpha g(x_\alpha) \\ &= (-1)^{mn} b_0^m \prod f(x_\beta') \end{aligned} \right. \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, 3, \ldots, m \\ \beta = 1, 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Wenn wir in diese Formel statt $g(x)$ eintragen die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$, also $n = m - 1$ nehmen, so ergibt sich für die Diskriminante von f die Bestimmung

$$D(f) = a_0^{m-2} \prod_{\alpha} f'(x_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, m). \tag{14}$$

Nun ist nach § 56, S. 68 die Ableitung von $f(x)$

$$f'(x_\alpha) = (x_\alpha - x_1)(x_\alpha - x_2) \ldots (x_\alpha - x_{\alpha-1})(x_\alpha - x_{\alpha+1}) \ldots (x_\alpha - x_m),$$

also

$$D(f) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^{m-2} \prod_{\alpha,\beta} (x_\alpha - x_\beta)^2 \qquad (\alpha > \beta). \tag{15}$$

Der bloße Anblick der Formeln (13) zeigt, daß das Verschwinden von $R(f, g)$ charakteristisch ist für die Existenz einer gemeinsamen Wurzel der Gleichungen

$$f = 0, \quad g = 0,$$

und das von $D(f)$ für die einer mehrfachen Wurzel von $f = 0$. Zu erwähnen ist in dem letzten Falle, daß schon die Funktion

$$\sqrt{D(f)} = \pm \prod_{\alpha,\beta} (x_\alpha - x_\beta) \qquad (\alpha > \beta)$$

bei einer mehrfachen Wurzel von $f = 0$ und nur bei einer solchen verschwindet, daß sie aber freilich nicht als ganze Funktion der Koeffizienten von f darstellbar ist.

Siebentes Kapitel.

Die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades.

§ 90. Die Gleichungen zweiten Grades, auch quadratische Gleichungen benannt, haben die allgemeine Form

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0 \qquad (a_0 \neq 0). \tag{1}$$

Da der Koeffizient von x^2 nicht gleich Null ist, so kann man durch ihn dividieren; setzt man

$$\frac{a_1}{a_0} = -c_1, \quad \frac{a_2}{a_0} = c_2, \tag{2}$$

dann nimmt (1) die Gestalt an

$$x^2 - 2c_1 x + c_2 = 0. \tag{3}$$

Hieraus folgt in einfacher Weise ein Weg zur Lösung der Gleichung:

$$x^2 - 2c_1x + c_1^2 = c_1^2 - c_2,$$

$$(x - c_1)^2 = c_1^2 - c_2,$$

$$x - c_1 = \pm\sqrt{c_1^2 - c_2},$$

$$x = c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_2}. \tag{4}$$

(4) ist eine Folge von (3). Umgekehrt folgt (3) aus (4); denn es ist

$$\left(c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_2}\right)^2 - 2c_1\left(c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_2}\right) + c_2 = 0,$$

wie die Ausrechnung leicht ergibt. Daher sind die beiden Werte, die (4) bietet,

$$x_1 = c_1 + \sqrt{c_1^2 - c_2}, \quad x_2 = c_1 - \sqrt{c_1^2 - c_2} \tag{5}$$

zwei Wurzeln von (3) und nach § 42, S. 48 die beiden Wurzeln von (3). Aus den dort angestellten Betrachtungen folgt

$$x^2 - 2c_1x + c_2 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2,$$

$$x_1 + x_2 = 2c_1, \quad x_1 \cdot x_2 = c_2; \tag{6}$$

d. h. die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich dem negativ genommenen Koeffizienten der ersten Potenz der Unbekannten in der Normalform der Gleichung; das Produkt der Wurzeln gleich deren absolutem Gliede.

Geht man umgekehrt von der Aufgabe aus, zwei Zahlen u und v zu bestimmen, deren Summe gleich α und deren Produkt gleich β sein soll,

$$u + v = \alpha, \quad u \cdot v = \beta,$$

so zeigt (6), daß u und v die Wurzeln von

$$x^2 - \alpha x + \beta = 0$$

sind.

Aus den Wurzeln von (3) folgen durch (2) die Wurzeln von (1) in der Form

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_0}\left(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_0a_2}\right), \\ x_2 = \dfrac{1}{a_0}\left(-a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_0a_2}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Wir bezeichnen den Radikanden

$$4(a_0a_2 - a_1^2) = D \tag{8}$$

und nennen D die Diskriminante der Gleichung (1). Dies stimmt mit den Festsetzungen aus § 88, S. 106 überein, da man hat

$$\begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 \\ 2a_0 & 2a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & 2a_1 \end{vmatrix} = a_0(4a_0a_2 - 4a_1^2).$$

Sind die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 von (1) reelle Größen, dann ist das Vorzeichen von D für die Natur der Wurzeln von (1) entscheidend. Ist $\operatorname{sgn} D = -1$, dann ist der Radikand positiv, und x_1, x_2 werden reell. Ist $\operatorname{sgn} D = +1$, dann ist der Radikand negativ, und x_1, x_2 werden konjugiert komplex, nehmen also die Gestalt an

$$x_1 = p + qi, \quad x_2 = p - qi \qquad (\sqrt{-1} = i;\ q \neq 1).$$

Ist endlich $\operatorname{sgn} D = 0$, d. h. $D = 0$, dann hat (1) die Doppelwurzel (vgl. § 88, S. 106)

$$x_1 = x_2 = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Diese Resultate kann man auch folgendermaßen herleiten. Aus (6) folgt zunächst

$$\text{(6a)} \qquad x_1 + x_2 = -2\frac{a_1}{a_0}, \quad x_1 x_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

und daraus weiter

$$\text{(6b)} \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4\frac{a_1^2}{a_0^2} - 4\frac{a_2}{a_0} = -4\frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0^2}$$
$$= -\frac{1}{a_0^2} D.$$

Bei reellen, voneinander verschiedenen Wurzeln ist daher $D \neq 0$ und negativ; bei reellen, einander gleichen Wurzeln ist $D = 0$; bei konjugiert komplexen $x_1 = p + qi$, $x_2 = p - qi$ ist

$$(x_1 - x_2)^2 = (2qi)^2 = -4q^2 \qquad (q \neq 0),$$

d. h. $\operatorname{sgn} D = +1$. Diese drei Sätze lassen, wie ersichtlich ist, eine Umkehrung zu.

§ 91. Wir gehen zu den Gleichungen dritten Grades oder den kubischen Gleichungen über und betrachten zuerst die einfachste dieser Gleichungen, nämlich

$$\text{(9)} \qquad x^3 - 1 = 0.$$

Da $x_0 = 1$ eine Wurzel von (9) ist, so ist $(x^3 - 1)$ durch den Wurzelfaktor $(x - 1)$ teilbar, und in der Tat wird

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

so daß die weiteren Wurzeln von (9) durch

$$x^2 + x + 1 = 0$$

als

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2} \qquad (\operatorname{sgn} \sqrt{3} = +1)$$

bestimmt werden. Die erhaltenen drei Werte x_0, x_1, x_2 heißen die drei dritten Einheitswurzeln. Durch Ausrechnung überzeugt man

sich leicht von der Richtigkeit der Beziehungen unter den Wurzeln x_1, x_2

$$x_1^2 = x_2, \quad x_2^2 = x_1, \quad x_1 x_2 = 1, \quad x_1 + x_2 = -1.$$

Unsere früheren Betrachtungen zeigten, daß x_0, x_1, x_2 die einzigen Größen sind, deren dritte Potenz $= 1$ ist. Wir wollen im folgenden

$$x_1 = \omega_3, \quad x_2 = \omega_3^2$$

bezeichnen.

Ist dann a eine dritte Wurzel aus der beliebig gegebenen Größe A, dann sind $a \cdot \omega_3$ und $a \cdot \omega_3^2$ die beiden anderen; also hat man für die Kubikwurzel aus A die drei Größen

$$\sqrt[3]{A} = a; \quad a\omega_3; \quad a\omega_3^2.$$

§ 92. Ist die allgemeine Gleichung dritten Grades oder die allgemeine kubische Gleichung

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \tag{10}$$

vorgelegt, so kann man ihre Gestalt durch die Substitution

$$x = y - \frac{a_1}{a_0} \tag{10a}$$

insofern vereinfachen, als die resultierende Gleichung für y, nämlich

$$y^3 - 3\frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2} y + \frac{2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3}{a_0^3} = 0, \tag{11}$$

kein Glied mit der zweiten Potenz der Unbekannten aufweist. Wir setzen nun in (11)

$$\frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2} = a, \quad \frac{2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3}{a_0^3} = -2b, \tag{12}$$

wodurch (11) die reduzierte Form

$$y^3 - 3ay - 2b = 0 \tag{13}$$

annimmt.

Um diese vereinfachte Gleichung zu lösen, nehmen wir für die Unbekannte y die Substitution vor

$$y = u + v$$

und erhalten aus (13) den Ausdruck der transformierten Gleichung

$$(u^3 + v^3 - 2b) + 3(u + v)(uv - a) = 0.$$

Jetzt legen wir den beiden Größen u und v die Forderungen auf, die Gleichungen

$$u^3 + v^3 = 2b, \quad uv = a$$

zu befriedigen. Aus der zweiten Forderung entnehmen wir $v = \frac{a}{u}$;

dies tragen wir in die erste ein, multiplizieren mit u^3 und bekommen nach dieser Multiplikation

$$u^6 - 2bu^3 + a^3 = 0.$$

Hieraus folgt durch Lösung der in u^3 quadratischen Gleichung

$$u^3 = b + \sqrt[2]{b^2 - a^3},$$
$$u = \sqrt[3]{b + \sqrt[2]{b^2 - a^3}},$$

und wegen $v = a : u$ noch

$$v = \frac{a}{\sqrt[3]{b + \sqrt[2]{b^2 - a^3}}},$$

also schließlich

$$y = u + v = \sqrt[3]{b + \sqrt[2]{b^2 - a^3}} + \frac{a}{\sqrt[3]{b + \sqrt[2]{b^2 - a^3}}}. \tag{14}$$

§ 93. Wir müssen diese Lösung eingehender studieren. Die in der Formel auftretende Quadratwurzel hat zwei, nur durch das Vorzeichen unterschiedene Werte. Wird also einer von ihnen, gleichgültig welcher, mit $\sqrt[2]{b^2 - a^3}$ bezeichnet, so ist der andere $-\sqrt[2]{b^2 - a^3}$. Wenn ferner nach Festlegung des Wertes der Quadratwurzel der Wert von u so bestimmt wird, daß seine dritte Potenz gleich $(b + \sqrt[3]{b^2 - a^3})$ bzw. gleich $(b - \sqrt[3]{b^2 - a^3})$ ist, dann hat man für u die sechs Werte

$$u_1 = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}}, \quad u_2 = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} \cdot \omega_3, \quad u_3 = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} \cdot \omega_3^2,$$
$$u_4 = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}}, \quad u_5 = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}} \cdot \omega_3, \quad u_6 = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}} \cdot \omega_3^2$$
$$(\omega_3^3 = 1).$$

Somit hat es den Anschein, als hätte die Gleichung (13) dritten Grades die sechs Wurzeln

$$y_\varkappa = u_\varkappa + \frac{a}{u_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, 6).$$

Dies steht aber in Widerspruch mit Früherem über die Maximalanzahl der Gleichungswurzeln und muß aufgeklärt werden. Nun hat man

$$u_1 \cdot u_4 = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} \cdot \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}} = \sqrt[3]{b^2 - (\sqrt{b^2 - a^3})^2} = \sqrt[3]{a^3} = a;$$

also wird

$$u_1 \cdot u_4 = a\,\omega_3^{\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1, 2), \tag{15}$$

wobei λ jeden der drei Werte 0, 1, 2 annehmen kann und muß. Es wird daher

$$\frac{a\omega_3^\lambda}{u_1} = \frac{a}{\omega_3^\mu u_1}, \quad \frac{a}{u_4} = \frac{u_1}{\omega_3^\lambda} = \omega_3^\mu u_1, \qquad (\lambda + \mu = 3),$$
$$y_4 = u_1 \cdot \omega_3^\mu + \frac{a}{u_1 \omega_3^\mu},$$

d. h. y_4 hat einen der drei Werte y_1, y_2 oder y_3. Ebenso gilt die Beziehung

$$u_5 = u_4 \omega_3 = \frac{a}{\omega_3^{\mu-1} u_1}, \quad \frac{a}{u_5} = \omega_3^{\mu-1} u_1,$$
$$y_5 = u_1 \omega_3^{\mu-1} + \frac{a}{u_1 \omega_3^{\mu-1}},$$

und endlich

$$y_6 = u_1 \omega_3^{\mu-2} + \frac{a}{u_1 \omega_3^{\mu-2}}.$$

Die drei Werte y_4, y_5, y_6 stimmen daher mit den drei Werten y_1, y_2, y_3 überein abgesehen von der Reihenfolge, und die Zahl der Wurzeln reduziert sich auf drei, wie es sein muß.

Aus (15) folgt, daß man dem y in (14) auch die Form

$$y = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}}$$

geben kann. Das ist aber mit einem Mißstande verbunden, da ja wegen $uv = a$ die zweite Wurzel von der Wahl der ersten abhängig und durch sie eindeutig bestimmt ist, was ja ohne weiteren Zusatz aus der Formel allein nicht zu ersehen ist.[1])

§ 94. Wir nehmen nun an, a und b seien reelle Größen, und fragen nach der Realität der drei Wurzeln

$$(16) \qquad y_\lambda = \omega_3^\lambda \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \frac{\omega_3^{2\lambda} a}{\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}}} \qquad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Dabei unterscheiden wir drei Fälle.

Zuerst sei der Radikand der inneren Wurzel wesentlich negativ, also < 0,

$$b^2 - a^3 = -k^2 \qquad (k \neq 0),$$

und es sei mit reellen β und $\varkappa$

$$\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} = \sqrt[3]{b + ki} = \beta + \varkappa i;$$

---

1) Die unter reeller Form auftretende Lösung der kubischen Gleichung wurde von Scipione dal Ferro 1515 gefunden, allein nicht veröffentlicht. Im Verlaufe eines wissenschaftlichen Wettstreites wurde sie 1535 von Nicolo Tartaglia wieder entdeckt und dem Girolamo oder Geronimo Cardano mitgeteilt. Dieser machte sie gegen Tartaglias Willen 1545 in seiner „ars magna" bekannt und gab zugleich einen Beweis für sie. Nach ihm führt sie den Namen „Cardanische Formel".

dann findet man β und $\varkappa$ durch Potenzierung

$$(17)\qquad (\beta+\varkappa i)^3 = b + ki,\quad (\beta-\varkappa i)^3 = b - ki,$$
$$(\beta^2+\varkappa^2)^3 = b^2 + k^2 = a^3,$$
$$\beta^2 + \varkappa^2 = a,$$

wo der durch die Kubikwurzelausziehung vermittelte Übergang von der vorletzten zur letzten Gleichung eindeutig ist, also rechts nicht etwa $a\omega_3$ oder $a\omega_3^2$ auftreten kann, da ja links eine positive reelle Größe steht. Weiter ist unter Benutzung der letzten Gleichung

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b+\sqrt{b^2-a^3}}} = \frac{a}{\beta+\varkappa i} = \frac{a(\beta-\varkappa i)}{\beta^2+\varkappa^2} = \beta - \varkappa i,$$

und wenn man die Werte von ω_3 und ω_3^2 einträgt (§ 91, S. 111),

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}(\beta+\varkappa i) + \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}(\beta-\varkappa i) = -\beta - \varkappa\sqrt{3},$$
$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}(\beta+\varkappa i) + \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}(\beta-\varkappa i) = -\beta + \varkappa\sqrt{3},$$
$$y_3 = (\beta+\varkappa i) + (\beta-\varkappa i) = 2\beta.$$

Diese drei Werte sind reell; sie sind auch untereinander verschieden. Denn aus $y_1 = y_2$ würde $\varkappa = 0$ folgen und daraus wegen (17) $k = 0$, was der Voraussetzung widerspricht, daß $\operatorname{sgn}(b^2 - a^3) = -1$ ist.

Ebensowenig kann $y_1 = y_3$ oder $y_2 = y_3$ sein; denn daraus würde $\varkappa = \pm\sqrt{3}\,\beta$ folgen, und das ergäbe

$$b + ki = (\beta+\varkappa i)^3 = (\beta \pm \sqrt{3}\,\beta i)^3 = \beta^3(1 \pm \sqrt{3}\,i)^3$$
$$= -8\beta^3;$$

also wäre auch hier $k = 0$, entgegen der Annahme, da $8\beta^3$ reell ist. —

Zweitens sei $b^2 - a^3 = 0$; dann reicht es aus, in den bisherigen Betrachtungen $k = 0$, also auch $\varkappa = 0$ zu setzen. Man erhält demnach

$$y_1 = -\beta,\quad y_2 = -\beta,\quad y_3 = 2\beta;$$

d. h. die drei Wurzeln sind reell und zwei einander gleich. —

Drittens nehmen wir an, es sei

$$b^2 - a^3 = +k^2 \qquad (k \neq 0),$$

und bezeichnen den reellen Wert, den die dritte Wurzel aus $(b+k)$ hat, mit γ, also

$$\sqrt[3]{b+k} = \gamma,$$

dann wird

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\gamma + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\frac{a}{\gamma} = -\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{a}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\left(\gamma-\frac{a}{\gamma}\right),$$

$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\gamma + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\frac{a}{\gamma} = -\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{a}{\gamma}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\left(\gamma-\frac{a}{\gamma}\right),$$

$$y = \gamma + \frac{a}{\gamma}.$$

Hier könnten y_1 und y_2 nur dann nicht konjugiert komplex sein, wenn man hätte

$$\gamma - \frac{a}{\gamma} = 0;$$

daraus würde folgen

$$\gamma^3 = b + k = \frac{a^3}{\gamma^3} = \frac{a^3}{b-k} = \frac{b^3-k^3}{b^3+k^3} = b - k,$$

so daß also gegen die Annahme $k = 0$ wäre. —

Wir fassen die Resultate der drei Fälle zusammen: Die drei Wurzeln der Gleichung

$$y^3 - 3ay - 2b = 0$$

sind reell und voneinander verschieden, wenn $(b^2 - a^3)$ negativ ist; sie sind reell und zwei von ihnen einander gleich, wenn $(b^2 - a^3)$ verschwindet; eine ist reell und die beiden anderen sind konjugiert komplex, wenn $(b^2 - a^3)$ positiv ist.

Durch Verwendung von (12) geht der innere Radikand in dem Ausdrucke für y, nämlich

$$(b^2 - a^3) \quad \text{in} \quad \frac{1}{4a_0^4}[4a_1^3a_3 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 + a_0^2a_3^2]$$

über. Wir setzen unter Benutzung dieser Funktion

$$D = \frac{27}{a_0^4}[4a_1^3a_3 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 + a_0^2a_3^2]$$
$$= \frac{27}{a_0^6}[4(a_0a_2 - a_1^2)^3 + (2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3)^2]$$

und nennen dieses D die Diskriminante von (11). Die Diskriminante von (13) ist demnach

$$D = 4 \cdot 27(b^2 - a^3).$$

Diese Festsetzung stimmt mit unserer früheren Definition überein; denn man sieht leicht, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3a & -2b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3a & -2b \\ 3 & 0 & -3a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3a \end{vmatrix} = 4 \cdot 27(b^2 - a^3) = D.$$

Man überzeugt sich durch wirkliche Berechnung ohne Schwierigkeit von der Richtigkeit der beiden weiteren Darstellungen von D in Determinantenform

$$a_0^4 \cdot D = 27 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \end{vmatrix} \qquad 27 \cdot \begin{vmatrix} 2a_0a_2 - 2a_1^2 & a_0a_3 - a_1a_2 \\ a_0a_3 - a_1a_2 & 2a_1a_3 - 2a_2^2 \end{vmatrix}$$

§ 95. Wir sahen oben, daß eine enge Beziehung zwischen der Diskriminante einer quadratischen Gleichung und dem Quadrate der Differenzen ihrer Wurzeln besteht. Wir wollen untersuchen, ob Ähnliches bei den Gleichungen dritten Grades statt hat. Wir schreiben (14), indem wir für den Augenblick der Kürze wegen die in (16) eingehende dritte Wurzel mit w bezeichnen,

$$y_1 = \omega_3 w + \frac{\omega_3^2 a}{w}, \quad y_2 = \omega_3^2 w + \frac{\omega_3 a}{w}, \quad y_3 = w + \frac{a}{w}$$

und erhalten dann

$$(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) = (\omega_3 - 1)(\omega_3^2 - 1)\left(w^2 + \frac{a^2}{w^2}\right) + [(\omega_3 - 1)^2 + (\omega_3^2 - 1)]a$$
$$= 3\left(w^2 + \frac{a^2}{w^2} + a\right),$$
$$(y_1 - y_2) = (\omega_3 - \omega_3^2)\left(w - \frac{a}{w}\right) = \sqrt{3}\,i\left(w - \frac{a}{w}\right);$$
$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) = \sqrt{27}\,i\left(w^3 - \frac{a^3}{w^3}\right)$$
$$= \sqrt{27}\,i\left(b + \sqrt{b^2 - a^3} - b + \sqrt{b^2 - a^3}\right)$$
$$= 2\sqrt{27}\,i\sqrt{b^2 - a^3}$$
$$= \sqrt{-D}.$$

Bezeichnet man die drei Wurzeln von (10) mit x_1, x_2, x_3, so ist wegen (10a)

$$y_1 = x_1 + \frac{a_1}{a_0}, \quad y_2 = x_2 + \frac{a_1}{a_0}, \quad y_3 = x_3 + \frac{a_1}{a_0},$$

also

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$
$$= \sqrt{-D} = 2\sqrt{27}\,i\sqrt{b^2 - a^3},$$

$$\text{(15a)} \qquad D = -(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$$

Diese Formel führt uns auf die Beziehungen von sgn D zur Realität der Wurzeln zurück. Eine der drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 ist sicher reell (§ 105, S. 127), es sei dies x_3. Sind auch x_1 und x_2 reell und vonein-

ander verschieden, so ist sgn $D = -1$; für $x_1 = x_2$ wird sgn $D = 0$. Ist dagegen

$$x_1 = p + qi, \quad x_2 = p - qi \qquad (q \neq 0),$$

so wird

$$D = -(2qi)^2[(p - x_3)^2 + q^2]^2$$

und

$$\operatorname{sgn} D = +1.$$

§ 96. In dem Falle sgn $D = -1$ werden die drei Wurzeln der kubischen Gleichung reell. Bei der Berechnung ihrer Werte nach der Cardanischen Formel wird man von den reellen Koeffizienten zu den reellen Wurzeln wegen des imaginären Wertes von $\sqrt{b^2 - a^3}$ durch das Gebiet der komplexen Größen geführt, derart, daß die Wurzeln als Summen konjugiert komplexer Zahlen auftreten. Doch ist es unter Benutzung goniometrischer Funktionen möglich, die Darstellung der drei Wurzeln im Gebiete der reellen Größen zu geben. Dies geschieht folgendermaßen:

Wegen $a^3 > b^2$ ist a positiv und $b < \sqrt{a^3}$; also kann

$$a^3 = \varrho^2, \quad \frac{b}{\varrho} = \cos\vartheta \tag{18}$$

und deshalb

$$y^3 - 3ay - 2b = y^3 - 3\varrho^{\frac{2}{3}}y - 2\varrho\cos\vartheta = 0$$

gesetzt werden. Tragen wir in die letzte Form der kubischen Gleichung für y eine Größe u ein, die bestimmt ist durch

$$y = 2\varrho^{\frac{1}{3}}u = 2\sqrt{a}\,u,$$

und dividieren das Resultat durch ϱ, so entsteht die Gleichung

$$4u^3 - 3u = \cos\vartheta.$$

Diese Form vergleichen wir mit der goniometrischen Formel der Trisektion des Winkels ϑ, d. h. mit

$$4\cos^3\frac{\vartheta}{3} - 3\cos\frac{\vartheta}{3} = \cos\vartheta,$$

und entnehmen ihr das Resultat $u = \cos\frac{\vartheta}{3}$; da aber jetzt ϑ ohne Änderung der rechten Seite auch durch $\vartheta + 2\pi$ und durch $\vartheta + 4\pi$ ersetzt werden kann, so erhalten wir

$$\cos\frac{\vartheta}{3}; \quad u_2 = \cos\frac{\vartheta + 2\pi}{3}; \quad u_3 = \cos\frac{\vartheta + 4\pi}{3},$$

und daraus

$$y_1 = 2\sqrt{a}\cdot\cos\frac{\vartheta}{3}; \quad y_2 = 2\sqrt{a}\cdot\cos\frac{\vartheta+2\pi}{3}; \quad y_3 = 2\sqrt{a}\cdot\cos\frac{\vartheta+4\pi}{3},$$

d. h. die Wurzelwerte können in diesem Falle durch Ausziehung einer Quadratwurzel und durch Dreiteilung eines Winkels berechnet werden.

Der besprochene Fall, bei dem $a^3 > b^2$ ist, heißt der „casus irreducibilis"; das hier verwendete Wort „irreduzibel" hat mit der früher eingeführten Bedeutung desselben nichts zu tun.

§ 97. Aus (10), S. 112 folgt

$$\begin{aligned} a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 &= a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= a_0[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3] \end{aligned}$$

und daraus durch Vergleichung entsprechender Koeffizienten

$$(19) \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{3a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = \dfrac{3a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_3}{a_0}. \end{cases}$$

Die linken Seiten dieser drei Gleichungen werden von den elementarsymmetrischen Funktionen der drei Größen x_1, x_2, x_3 gebildet, (19) gibt ihre Darstellung durch die Koeffizienten der Gleichung mit den Wurzeln x_1, x_2, x_3. Mit ihrer Hilfe können wir nun folgende Transformation machen:

$$\begin{aligned} b = \frac{1}{2}y_1y_2y_3 &= \frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a_1}{a_0}\right)\left(x_2+\frac{a_1}{a_0}\right)\left(x_3+\frac{a_1}{a_0}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_1-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\left(x_2-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\left(x_3-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{54}(+2x_1-x_2-x_3)(-x_1+2x_2-x_3)(-x_1-x_2+2x_3) \\ &= \frac{1}{27}\Big[x_1^3+x_2^3+x_3^3-\frac{3}{2}(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2 \\ &\qquad +x_3^2x_1+x_3x_1^2)+6x_1x_2x_3\Big]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2-a^3} &= \frac{1}{27}\left[\pm\frac{3\sqrt{3}i}{2}(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\right] \\ &= \frac{1}{27}\Big[\pm\frac{3\sqrt{3}i}{2}(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1) \\ &\qquad \mp\frac{3\sqrt{3}i}{2}(x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2)\Big]; \end{aligned}$$

$$b \pm \sqrt{b^2 - a^3} = \frac{1}{27}\Big[x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\,\frac{-1 \pm \sqrt{2}\,i}{2}\,(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1)$$
$$+ 3\,\frac{-1 \mp \sqrt{2}\,i}{2}\,(x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2) + 6 x_1 x_2 x_3\Big]$$
$$= \frac{1}{27}\Big[x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\,\omega_3^{\alpha}(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1)$$
$$+ 3\,\omega_3^{2\alpha}(x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2) + 6 x_1 x_2 x_3\Big]$$
$$= \Big[\frac{1}{3}(x_1 + \omega_3^{\alpha} x_2 + \omega_3^{2\alpha} x_3)\Big]^3 \qquad (\alpha = 1 \text{ oder } = 2).$$

Hiernach ist also die in die Lösung eingehende Kubikwurzel

$$\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} = \frac{1}{2}(x_1 + \omega_3^{\alpha} x_2 + \omega_3^{2\alpha} x_3)$$

eine rationale Funktion der Wurzeln x_1, x_2, x_3, genau wie vorher die Quadratwurzel

$$\sqrt{b^2 - a^3} = \frac{\pm i}{\sqrt{108}}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Auch bei den Gleichungen zweiten Grades bemerkten wir Ähnliches. Ist die Gleichung

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2 = 0,$$

dann tritt in ihre Lösung die Wurzel (Gl. (7), S. 110)

$$2\sqrt{\frac{a_1^2 - a_0 a_1}{a_0^2}} = x_1 - x_2.$$

§ 98. Durch die Formeln (19) läßt sich die Aufgabe, die Größen u, v, w zu bestimmen, die den drei Forderungen

$$u + v + w = a,$$
$$uv + vw + wu = b,$$
$$uvw = c$$

genügen, in denen a, b, c gegebene Werte sind, auf die Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 - a x^2 + b x - c = 0$$

zurückführen; die drei Wurzeln der Gleichung geben, in irgendwelcher Folge genommen, die Größen u, v, w.

§ 99. Die allgemeine Gleichung vierten Grades oder die biquadratische Gleichung hat die Form

$$\text{(19a)} \qquad a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0 \qquad (a_0 \neq 0).$$

Durch die Substitution

$$x = y - \frac{a_1}{a_0}$$

nimmt sie eine Gestalt an, in der das Glied mit y^3 wegfällt, und die wir als Normalform bezeichnen,

$$y^4 + 6ay^2 + 4by + c = 0, \tag{20}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0^2}, \quad b = \frac{a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3}{a_0^3}, \\ c &= \frac{a_0^3 a_4 - 4 a_0^2 a_1 a_3 + 6 a_0 a_1^2 a_2 - 3 a_1^4}{a_0^4}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

(Daß eine ähnliche Vereinfachung bei der Gleichung n^{ten} Grades

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots + n a_{n-1} x + a_n = 0$$

durch die Substitution

$$x = y - \frac{a_1}{a_0}$$

hervorgerufen wird, derart, daß in der transformierten Gleichung das Glied mit y^{n-1} fortfällt, ist leicht ersichtlich. Auch in diesem Falle wollen wir die Bezeichnung Normalform einführen.)

Wir setzen nun für die Unbekannte y eine Summe aus drei Summanden

$$y = s + t + u;$$

dann folgt durch zweimalige Erhebung in das Quadrat

$$y^2 - (s^2 + t^2 + u^2) = 2(tu + us + st),$$

$$y^4 - 2(s^2 + t^2 + u^2)y^2 + (s^2 + t^2 + u^2)^2 = 4(t^2u^2 + 4u^2s^2 + s^2t^2) + 8stu\,y.$$

Diese Gleichung wird identisch mit (20), wenn wir setzen

$$\left\{\begin{aligned} s^2 + t^2 + u^2 &= -3a, \\ stu &= -\frac{1}{2} b, \\ (s^2 + t^2 + u^2)^2 - 4(t^2u^2 + u^2s^2 + s^2t^2) &= 0, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

woraus für die elementarsymmetrischen Funktionen von s^2, t^2, u^2 sich ergibt

$$\left\{\begin{aligned} s^2 + t^2 + u^2 &= -3a, \\ t^2u^2 + u^2s^2 + s^2t^2 &= \frac{1}{4}(9a^2 - c), \\ s^2t^2u^2 &= \frac{1}{4} b^2. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Die drei Größen s^2, t^2, u^2 sind daher (§ 98, S. 120) die Wurzeln einer kubischen Gleichung

$$z^3 + 3az^2 + \frac{1}{4}(9a^2 - c)z - \frac{1}{4} b^2 = 0, \tag{24}$$

die durch die Substitution

$$z = w - a$$

übergeht in die Normalform

$$4w^3 - (3a^2 + c)w + (ac - a^3 - b^2) = 0. \tag{19b}$$

Die Auflösung dieser kubischen Gleichung liefere die drei Wurzeln w_1, w_2, w_3; dann ist

$$s^2 = w_1 - a, \quad t^2 = w_2 - a, \quad u^2 = w_3 - a;$$

$$s = \pm\sqrt{w_1 - a}, \quad t = \pm\sqrt{w_2 - a}, \quad u = \pm\sqrt{w_3 - a}.$$

Hierin sind die Vorzeichen der drei Quadratwurzeln nicht unabhängig voneinander. Das kommt daher, daß durch den Übergang von (22) zu (23) fremde Lösungen in das Problem der Bestimmung von s, t, u eingeführt sind, indem zu den Werten, für die $stu = -\frac{1}{2}b$ ist, noch durch den Übergang zu $s^2t^2u^2$ die Werte hinzugefügt sind, für die $stu = +\frac{1}{2}b$ wird. Um diese wieder auszuschalten, setzen wir die Werte an

$$s = \pm\sqrt{w_1 - a}, \quad t = \pm\sqrt{w_2 - a}, \quad u = -\frac{b}{2st},$$

wobei die Vorzeichen der beiden Quadratwurzeln, unabhängig voneinander, willkürlich gewählt werden können. Geht man mit den vier dabei möglichen Annahmen auf die y und von da auf die x zurück, so kommt man auf die Werte

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_1}{a_0} + \sqrt{w_1 - a} + \sqrt{w_2 - a} - \frac{b}{2\sqrt{w_1 - a}\sqrt{w_2 - a}}, \\ x_2 &= -\frac{a_1}{a_0} + \sqrt{w_1 - a} - \sqrt{w_2 - a} + \frac{b}{2\sqrt{w_1 - a}\sqrt{w_2 - a}}, \\ x_3 &= -\frac{a_1}{a_0} - \sqrt{w_1 - a} + \sqrt{w_2 - a} + \frac{b}{2\sqrt{w_1 - a}\sqrt{w_2 - a}}, \\ x_4 &= -\frac{a_1}{a_0} - \sqrt{w_1 - a} - \sqrt{w_2 - a} - \frac{b}{2\sqrt{w_1 - a}\sqrt{w_2 - a}}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

So ist man zu den Wurzeln von (19) durch Auflösung einer kubischen Gleichung und durch zwei Quadratwurzelausziehungen gelangt.

Aus der Identität

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_6 = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

folgen die Relationen zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln der vier Größen (25)

$$(26)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_6 = +6a_2 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{4a_3}{a_0}, \\ x_1x_2x_3x_4 = +\frac{a_4}{a_0}. \end{cases}$$

§ 100. Aus (25) ergibt sich sofort durch Addition unter Verwendung der ersten Gleichung von (27)

$$(27\text{a})\quad \begin{cases} 2s = 2\sqrt{w_1 - a} = x_1 + x_2 + \frac{2a_1}{a_0} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4), \\ 2t = 2\sqrt{w_2 - a} = x_1 + x_3 + \frac{2a_1}{a_0} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \\ 2u = 2\sqrt{w_3 - a} = x_1 + x_4 + \frac{2a_1}{a_0} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4). \end{cases}$$

Man erkennt, daß die lineare Funktion der vier Wurzeln

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

bei allen 24 möglichen Vertauschungen der vier x untereinander sechs Werte, und daß ihr Quadrat

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$$

nur drei Werte annimmt.

§ 101. Bei der Auflösung der Gleichung (19b) ist die Funktion von Wichtigkeit, die wir, wie früher, als Diskriminante von (19b) bezeichnen und die in engem Zusammenhang mit der Funktion

$$\Delta_w = (w_1 - w_2)^2(w_1 - w_3)^2(w_2 - w_3)^2$$

steht. Nun findet man aus (25), wenn man die Wurzel w_3 einführt,

$$x_1 - x_2 = 2\left(\sqrt{w_2 - a} + \sqrt{w_3 - a}\right), \quad x_1 - x_3 = 2\left(\sqrt{w_1 - a} + \sqrt{w_3 - a}\right),$$
$$x_1 - x_4 = 2\left(\sqrt{w_1 - a} + \sqrt{w_2 - a}\right),$$
$$x_2 - x_3 = 2\left(\sqrt{w_2 - a} - \sqrt{w_3 - a}\right), \quad x_2 - x_4 = 2\left(\sqrt{w_1 - a} - \sqrt{w_3 - a}\right),$$
$$x_3 - x_4 = 2\left(\sqrt{w_1 - a} - \sqrt{w_2 - a}\right),$$

und daraus, wenn wir abkürzend

$$\Delta_x = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2$$

setzen, die Beziehung

$$(24\text{a})\qquad \Delta_x = 4^6\Delta_w.$$

Gesetzt nun, alle vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 wären reell, dann wird Δ_x, also auch Δ_w positiv, oder beim Auftreten gleicher Wurzeln $\Delta_x = 0$, $\Delta_w = 0$.

Sind zwei der Wurzeln, etwa x_1 und x_2, reell und voneinander verschieden, während die beiden anderen konjugiert komplex sind, $x_3 = p + qi$, $x_4 = p - qi$ bei $q \neq 0$, dann wird

$$\begin{aligned}\Delta_x &= (x_1 - x_2)^2 \cdot [(x_1 - p - qi)(x_1 - p + qi)]^2 \\ &\quad \cdot [(x_2 - p - qi)(x_2 - p + qi)]^2 \cdot (2qi)^2 \\ &= -4q^2(x_1 - x_2)^2 \cdot [(x_1 - p)^2 + q^2]^2 \cdot [(x_2 - p)^2 + q^2]^2,\end{aligned}$$

also

$$\operatorname{sgn} \Delta_x = \operatorname{sgn} \Delta_w = -1.$$

Bilden die vier Wurzeln zwei Paare konjugiert komplexer, voneinander verschiedener Größen

$$x_1 = m + ni, \quad x_2 = m - ni, \quad x_3 = p + qi, \quad x_4 = p - qi,$$

so wird

$$\Delta_x = (2ni)^2(2qi)^2[(m-p)^2 + (n-q)^2]^2 \cdot [(m-p)^2 + (n+q)^2],$$

$$\operatorname{sgn} \Delta_x = \operatorname{sgn} \Delta_w = +1.$$

Umgekehrt: Hat die Gleichung (7) in w drei reelle Wurzeln, dann ist

$$\operatorname{sgn} \Delta_w = \operatorname{sgn} \Delta_x = +1,$$

so daß die Gleichung (19) in x entweder vier oder keine reelle Wurzeln besitzt. Hat die Gleichung in w nur eine reelle Wurzel, dann ist

$$\operatorname{sgn} \Delta_w = \operatorname{sgn} \Delta_x = -1,$$

so daß die Gleichung in x zwei reelle Wurzeln besitzt. Hat endlich die Gleichung in w gleiche Wurzeln, dann ist

$$\operatorname{sgn} \Delta_w = \operatorname{sgn} \Delta_x = 0,$$

so daß die Gleichung in x ebenfalls gleiche Wurzeln besitzt.

Wir nennen nun die Gleichung (19b) in w die kubische Resolvente[1]) der Gleichung (19) in x und fassen die in diesem Paragraphen hergeleiteten Resultate so zusammen:

Hat die kubische Resolvente einer biquadratischen Gleichung drei reelle, voneinander verschiedene Wurzeln, so hat die biquadratische Gleichung nur verschiedene, und zwar

1) L. Euler nennt „aequatio resolvens" eine Gleichung niederen Grades, durch deren Lösung die Lösung einer Gleichung höheren Grades vermittelt wird (Comment. Acad. Petrop. ad annum 1732 et 1733, T. VI, p. 220).

keine oder vier reelle Wurzeln. Hat die kubische Resolvente nur eine reelle Wurzel, so besitzt die biquadratische Gleichung zwei verschiedene reelle und zwar konjugiert komplexe Wurzeln. Hat die kubische Resolvente gleiche Wurzeln, so auch die biquadratische Gleichung.

§ 102. Die Darstellung der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 als Radikalgrößen der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_4$ geschieht nach unseren Entwicklungen auf folgendem Wege: Zunächst ist die Gleichung (19b) in w aufzulösen. Dies erfordert die Ausziehung der Quadratwurzel aus der Diskriminante der w und führt auf

$$(w_1 - w_2)(w_1 - w_3)(w_2 - w_3)$$
$$= \pm 4^3(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

also auf eine rationale Funktion der Wurzeln x. Der zweite Schritt besteht in der Ausziehung einer Kubikwurzel und führt auf die Funktion

$$\frac{1}{3}(w_1 + \omega_3 w_2 + \omega_3^2 w_3).$$

Nun liefert (21) wegen (3)

$$w_1 = \frac{1}{6}(x_1x_2 + x_3x_4) - \frac{1}{12}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4),$$
$$w_2 = \frac{1}{6}(x_1x_3 + x_2x_4) - \frac{1}{12}(x_1 + x_3)(x_2 + x_4),$$
$$w_3 = \frac{1}{6}(x_1x_4 + x_2x_3) - \frac{1}{12}(x_1 + x_4)(x_2 + x_3),$$

und es wird

$$\frac{1}{3}(w_1+\omega_3 w_2+\omega_3^2 w_3)=\frac{1}{12}[(x_1x_2+x_3x_4)+\omega_3(x_1x_3+x_2x_4)+\omega_3^2(x_1x_4+x_2x_3)],$$

also eine rationale Funktion der Wurzeln x. Der dritte Schritt fordert die Quadratwurzeln

$$\sqrt{w_1 - a}, \quad \sqrt{w_2 - a},$$

nach (25) haben diese die Werte

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4), \quad (x_1 + x_3 - x_2 - x_4), \quad (x_1 - x_4 + x_2 + x_3),$$

sie sind also wiederum rationale Funktionen der vier Wurzeln x_α.

§ 103. Die vorgetragenen Lösungsmethoden für die Gleichungen des dritten und die des vierten Grades stammen von Euler, der sie in den Comment. Acad. Petrop. VI, p. 216, derart darlegt, daß er bei der kubischen Gleichung

$$x^3 = ax + b$$

für x einsetzt

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

und bei der biquadratischen Gleichung

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

für x

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}.$$

Andere Lösungsmethoden sind folgende: Réné Descartes setzte (Geom. III. 1637)

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

und berechnet die Unbekannten p, q, r mit Hilfe einer kubischen Gleichung; die biquadratische Gleichung zerfällt dann in zwei quadratische Gleichungen.

Luigi Ferrari, ein Schüler des Cardano, bildet (1545)

$$x^4 + 2ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + ax + P)^2 - (Qx + R)^2,$$

berechnet aus dieser Annahme P, Q, R und findet dann die vier Werte von x durch die Lösung der Resolvente

$$x^2 + ax + P = \pm (Qx + R).$$

Auf eine Lösung von prinzipieller Wichtigkeit, die Lagrange gegeben hat, werden wir später einzugehen haben.

Achtes Kapitel.

Wurzelexistenzbeweise.

§ 104. Die Frage nach der Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen ist im voraufgehenden für die Gleichungen der vier niedrigsten Grade durch die Herstellung der Wurzeln erledigt worden. Für die Gleichungen fünften (und jedes ungeraden) Grades ist die Existenz einer Wurzel leicht aus Gründen der Stetigkeit herzuleiten; daraus folgt die Existenz bei den Gleichungen fünften Grades durch Herausziehen eines Wurzelfaktors das Vorhandensein von vier weiteren Wurzeln als Wurzeln einer Gleichung vierten Grades, während dieser Schluß bei den Gleichungen höherer Grade versagt, da er zwar von den Gleichungen ungeraden Grades auf die um eine Einheit im Grade geringeren, also auf Gleichungen geraden Grades zurückführt, für diese aber vollkommen im Stiche läßt, sobald das absolute Glied des Gleichungspolynoms positives Vorzeichen hat.

Der Beweis für die Gleichungen des Grades $(2n+1)$ mit reellen Koeffizienten $a, b, \ldots, d$

$$f(x) \equiv x^{2n+1} + ax^{2n} + bx^{2n-1} + \cdots + d = 0$$

gestaltet sich so: Es ist das Gleichungspolynom zunächst in die Form zu bringen

$$f(x) \equiv x^{2n+1}\left(1 + a\frac{1}{x} + b\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{d}{x^{2n+1}}\right);$$

weiter kann (§ 36, S. 40) eine absolute Größe ξ gefunden werden, derart, daß für jedes x, bei dem $|x| > \xi$ ist, die Klammer auf der rechten Seite der letzten Gleichung beliebig wenig von ihrem ersten Summanden 1 abweicht, also hier insbesondere, daß sie positiv ist. Daraus folgt dann

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x^{2n+1} = \operatorname{sgn} x, \quad \text{wenn} \quad |x| > \xi;$$

also wird $f(x)$ für hinreichend hohe positive Werte von x positiv und für hinlänglich hohe negative Werte von x negativ. Es läßt sich demnach ein Intervall von $+x_0$ bis $-x_1$ bestimmen, in dessen Anfangspunkt $f(x) = f(x_0)$ positiv, hingegen in dessen Endpunkt $f(x) = f(-x_1)$ negativ ist. Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ nimmt die Funktion jeden Zwischenwert im Intervalle $(x_0 \cdots -x_1)$ an, also auch den Wert 0. Geschieht dies für den Wert $x = \xi_0$, so ist $f(\xi_0) = 0$, d. h. ξ_0 ist ein Wurzelpunkt von $f(x)$.

Für Gleichungen geraden Grades mit reellen Koeffizienten, deren letzterer — das absolute Glied — negativ ist,

$$f(x) \equiv x^{2n} + ax^{2n-1} + bx^{2n-2} + \cdots + c \quad (\operatorname{sgn} c = -1),$$

kann man ähnlich schließen: Zunächst läßt sich eine absolute Größe ξ bestimmen, so daß für jedes x, deren Betrag die Größe ξ überschreitet,

$$\operatorname{sgn} f(x_0) = \operatorname{sgn} x_0^{2n} = +1 \qquad (|x| > \xi)$$

ist. Weiter hat man für das absolute Glied des Gleichungpolynoms

$$\operatorname{sgn} f(0) = \operatorname{sgn} c = -1.$$

Es geht daher $f(x)$ in jedem der beiden Intervalle $(x_0 \cdots 0)$ und $(0 \cdots -x_0)$ durch Null, d. h. in jedem von ihnen befindet sich ein Wurzelpunkt des Polynoms $f(x)$. Durch diese Schlüsse ist die Existenz zweier Wurzeln, einer positiven und einer negativen, der Gleichung $f(x) = 0$ sichergestellt.

§ 105. Der Erste, der einen strengen Beweis für die Existenz der Wurzeln einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades gab, war C. Fr. Gauß in seiner Doktordissertation, Helmstädt, im Jahre 1799. Er ließ seinen Darlegungen eine Kritik der bis dahin gemachten Beweisversuche voraufgehen und wies ihre Unhaltbarkeit oder Unvollständigkeit nach. In der Folge veröffentlichte Gauß noch drei weitere Beweise, deren letzter mit dem von 1799 in dem wesentlichen Gedankengange übereinstimmt, während die beiden mittleren auf völlig

anderen Prinzipien beruhen. Nach Gauß wurde noch eine ganze Reihe von Beweisgängen gefunden, von denen wir einige, ihrer Anlage nach verschiedene, besprechen wollen. Wir beginnen mit dem vierten Gaußschen Beweise, der sich vom ersten durch die offene Benutzung der komplexen Größen unterscheidet, die in diesem nur versteckt auftreten; dann aber auch dadurch, daß der vierte Beweis die Existenz sämtlicher n Wurzeln mit einem Male darlegt, während der erste schrittweise vorgeht, wie das im ersten Paragraphen dieses Kapitels angedeutet ist. Da diese Methode die Darstellung einfacher gestaltet, so wollen wir ihr folgen, also die Existenz einer Wurzel für jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades nachweisen.

§ 106. Die zu lösende Gleichung sei

$$f(x) \equiv x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots = 0, \tag{1}$$

wo $A, B, \ldots$ komplexe Größen bedeuten, deren Normalform durch die Festsetzungen (vgl. Grundlehren I, 1, S. 376)

$$A = a\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\!\alpha, \quad B = b\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\!\beta, \quad \ldots$$

gegeben ist. Auch für das Argument x tragen wir in $f(x)$ die Normalform komplexer Größen in der Gestalt (vgl. Grundlehren ibid.)

$$x = r\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\!\varrho$$

ein; wir fassen dabei r und ϱ als Polarkoordinaten des Punktes x in der Ebene der komplexen Werte auf. Durch diese Einführungen geht $f(x)$ bei Trennung des reellen Teils vom imaginären in die Form $(T + iU)$ über, wobei sich ergibt

$$\left\{\begin{aligned} T &= r^n \cos n\varrho + ar^{n-1}\cos[\alpha + (n-1)\varrho] + br^{n-2}\cos[\beta + (n-2)\varrho] + \cdots, \\ U &= r^n \sin n\varrho + ar^{n-1}\sin[\alpha + (n-1)\varrho] + br^{n-2}\sin[\beta + (n-2)\varrho] + \cdots. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Jede Wurzel von $f(x) = 0$ ist folglich dadurch charakterisiert, daß für die ihr zugehörigen Werte r, ϱ gleichzeitig T und U verschwinden.

Zunächst wollen wir aus der unendlich ausgedehnten Ebene ein endliches Flächenstück herausschneiden, außerhalb dessen sicher kein Wurzelpunkt von $f(x)$ vorhanden ist. Am einfachsten ist es, für dieses Flächenstück das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkte $x = 0$ zu wählen, d. h. für r eine Grenze zu bestimmen, die der absolute Betrag einer Wurzel von $f = 0$ nicht überschreiten kann.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Gleichung für r als Unbekannte

$$\frac{1}{\sqrt{2}}r^n - (ar^{n-1} + br^{n-2} + \cdots) \equiv Q(r) = 0, \tag{3}$$

die wir in die Form bringen wollen

$$(3\text{a})\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = ar^{-1} + br^{-2} + \cdots;$$

aus ihr geht hervor, daß die Gleichung (3) eine reelle Wurzel, und zwar eine wesentlich positive hat. Denn die rechte Seite der Gleichung (3a) nimmt für wachsende Werte von r stets ab; ferner hat sie für $r = 0$ den Wert ∞, und für $r = \infty$ den Wert 0, nimmt also einmal und nur einmal für ein positives $r = R$ den Wert der linken Seite $\sqrt{\frac{1}{2}}$ an. Demnach ist es klar, daß für jeden positiven Wert von r, der $> R$ ist, der Wert von

$$(4)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} r^n - (ar^{n-1} + br^{n-2} + \cdots) = Q(r) \qquad (r > R)$$

positiv sein wird. Das gleiche gilt von der Funktion

$$(5)\qquad \frac{nr^n}{\sqrt{2}} - [(n-1)ar^{n-1} + b(n-2)r^{n-2} + \cdots] = Q'(r),$$

da sie das n-fache der Funktion $Q(r)$ um die positive Größe

$$ar^{n-1} + 2br^{n-2} + 3cr^{n-3} + \cdots$$

übertrifft.

§ 107. Es ist nun leicht zu sehen, daß keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ einen absoluten Betrag haben kann, der größer als R ist, daß also keine der vorhandenen Wurzeln außerhalb des Kreises mit dem Zentrum O und dem Radius R sich befindet. Ist nämlich ein Punkt mit $r = r_0 > R$ und beliebigem Werte von ϱ gegeben, so ist für diesen entweder $\cos n\varrho \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $\sin n\varrho \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$; daher wird T bzw. U aus (2) größer als $Q(r_0)$ oder gleich $Q(r_0)$, also positiv, wie dies sofort die Vergleichung der einzelnen, einander entsprechenden Glieder der beiden Polynome zeigt. Wenn dagegen für den Punkt $\cos n\varrho \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $\sin n\varrho \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, dann wird T bzw. U aus (2) kleiner als $-Q(r_0)$ oder gleich $-Q(r_0)$, also negativ, wie die Vergleichung von T bzw. U mit $-Q'(r_0)$ zeigt. Wegen der Beziehung, die für jedes ϱ gilt,

$$\sin^2 n\varrho + \cos^2 n\varrho = 1,$$

muß für jeden Punkt einer der vier Fälle, die wir soeben angeführt haben, nämlich

$$\cos n\varrho \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin n\varrho \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos n\varrho \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin n\varrho \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

eintreten; daher können bei $r_0 \geqq R$ nicht T und U gleichzeitig verschwinden und ebensowenig kann es $T + iU = f(x)$.

Um das Verhalten von T und U in Beziehung auf die Vorzeichen und deren Wechsel bei einem bestimmten, R überschreitenden Werte r_0 von r noch mehr ins Licht zu setzen, lasse man r konstant $= r_0$ sein, und ϱ alle Werte zwischen zwei, um 2π voneinander verschiedenen Grenzen durchlaufen. Dazu kann, wenn $\frac{\pi}{4n} = \omega$ zur Abkürzung gesetzt wird, $-\omega$ und $(8n-1)\omega$ als untere und obere Grenze gewählt werden. Den ganzen Zwischenraum teilen wir dann in $4n$ gleiche Teile, so daß der erste sich von $-\omega$ bis $+\omega$, der zweite von ω bis 3ω, der dritte von 3ω bis $5\omega, \ldots$ erstreckt. Diese Intervalle bezeichnen wir mit [1], [2], [3], $\cdots$, [4n] und sehen sofort, daß in

$$(6)\quad \begin{cases} [1]\ \cos n\varrho \geqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ T > 0 \quad [3]\ \cos n\varrho \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}},\ T < 0 \\ [2]\ \sin n\varrho \geqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ U > 0 \quad [4]\ \sin n\varrho \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}},\ U < 0 \\ \qquad [5]\ \cos n\varrho \geqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ T > 0 \ \Big|\ \cdots \\ \qquad [6]\ \sin n\varrho \geqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ U > 0 \ \Big|\ \cdots \end{cases}$$

ist. Um das Verhalten von T in den Intervallen [2], [4], [6], ... und das von U in den Intervallen [1], [3], [5], ... festzustellen, bilden wir die Ableitungen T', U' beider Funktionen nach der Größe ϱ als unabhängigen Veränderlichen. Man erhält dabei

$$(7)\quad \begin{cases} T' = -nr^n \sin n\varrho - (n-1)ar^{n-1}\sin((n-1)\varrho + \alpha) \\ \qquad\qquad - (n-2)br^{n-2}\sin((n-2)\varrho + \beta) - \cdots, \\ U' = \quad nr^n \cos n\varrho + (n-1)ar^{n-1}\cos((n-1)\varrho + \alpha) \\ \qquad\qquad + (n-2)br^{n-2}\cos((n-2)\varrho + \beta) + \cdots. \end{cases}$$

Die eben besprochene Beweisführung, aus der (6) folgt, läßt sich nun auch auf T', U' und Q' in (5) anwenden und ergibt: es ist in

$$[1]\ U' > 0;\quad [2]\ T' < 0;\quad [3]\ U' < 0;\quad [4]\ T' > 0;$$
$$[5]\ U' > 0;\quad [6]\ T' < 0;\ \ldots.$$

Hieraus und in Verbindung mit (6) zieht man folgende Schlüsse:

In dem ersten Intervalle, d. i. von $\varrho = -\omega$ bis $\varrho = +\omega$ ist T stets positiv, U hingegen für den Anfangswert negativ, für den Endwert positiv, mithin dazwischen gewiß einmal $= 0$, und zwar nur ein-

mal, da wegen $U' > 0$ der Wert von U im ersten Intervalle stets wächst.

In dem zweiten Intervalle, d. i. von $\varrho = +\omega$ bis $\varrho = +3\omega$ ist U stets positiv, T zu Anfang positiv, am Ende negativ, dazwischen einmal $= 0$, und zwar nur einmal, weil in dem ganzen Intervalle $T' < 0$ ist, T also stets im zweiten Intervalle abnimmt.

In dem dritten Intervalle ist T stets negativ, U einem Zeichenwechsel unterworfen, so daß einmal $U = 0$ wird.

Im vierten Intervalle ist U stets negativ, T einmal $= 0$.

In den folgenden Intervallen wiederholen sich in gleicher Ordnung diese Verhältnisse, so daß das fünfte dem ersten, das sechste dem zweiten usf. gleich steht.

Den Punkt des zweiten Intervalles, in dem T verschwindet, bezeichnen wir mit $\{1\}$; den im vierten, sechsten, achten, ... $(2\alpha)^{\text{ten}}$ Intervalle, in dem $T = 0$ wird, mit $\{2\}$ bzw. mit $\{3\}$, $\{4\}$, ..., $\{\alpha\}$, bis zu dem Punkte $\{2n\}$ des $(4n)^{\text{ten}}$ Intervalles, für den T verschwindet. Man bemerke dabei, daß für die Punkte $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, ... die Funktion U positiv, für die Punkte $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, ... hingegen negativ sein wird.

§ 108. Die Gesamtheit der Punkte in unserer Ebene, für die T positiv ist, bildet zusammenhängende Flächenteile, wie fast von selbst erhellt, wenn man erwägt, daß bei einem stetigen Übergange von einem Punkte zu einem anderen T sich stetig ändert; solche Flächenteile mögen als solche „erster Art" bezeichnet werden. Ebenso bilden sämtliche Punkte, für die T negativ wird, zusammenhängende Flächenteile. Zwischen den Flächenteilen der ersten Art und denen der zweiten liegen Punkte, in denen $T = 0$ wird. Diese Punkte können nicht auch Flächenstücke, sondern nur Linien bilden, die einerseits die einen, andererseits die anderen Flächenteile begrenzen. Daß diese Punkte keine Fläche erfüllen, sieht man leicht. Erfüllten sie ein Flächenstück, dann verbinde man einen Punkt in seinem Innern durch einen Strahl mit dem Anfangspunkt der Koordinaten; alle Punkte des Strahls hätten den gleichen Wert ϱ_1 des Winkels ϱ; und die Gleichung vom n^{ten} Grade in r

$$r^n \cos n\varrho_1 + ar^{n-1}\cos(\alpha + (n-1)\varrho_1) \\ + br^{n-2}\cos(\beta + (n-2)\varrho_1) + \cdots = 0$$

hätte unendlich viele Wurzeln, ohne doch bei passend gewähltem ϱ_1 identisch zu verschwinden.

Die außerhalb des Kreises $r = r_0$ liegende Fläche enthält n Flächenteile der ersten Art, die mit ebensovielen der zweiten Art abwechseln, und von denen jedes, von einem Stücke der Kreislinie $r = r_0$ an, zusammenhängend sich ins Unendliche erstreckt. Zugleich aber ist klar,

daß jedes dieser Flächenstücke sich über die Kreislinie hinweg in den inneren Raum fortsetzt. Wir wollen eine Begrenzungslinie eines solchen Flächenstückes in das Innere des Kreises $r = r_0$ hinein verfolgen und zwar etwa die im Punkte $\{1\}$ des Intervalles [2] einsetzende Linie $T = 0$ in der Richtung von außen nach innen. Ist das der Fall, so hat man beim Eintritt ins Innere des Kreises von $\{1\}$ aus ein Flächenstück mit positivem T zur Linken und eins mit negativem T zur Rechten der Fortschrittsrichtung. Dies bleibt unverändert, solange die Fortschrittsrichtung unzweideutig gegeben ist. Wenn dies aber aufhört (was nur da eintreten kann, wo sich die Linie $T = 0$ in mehrere Teile spaltet), dann wähle man als Fortsetzung einen solchen Teil der Linie, daß auch für ihn ein Flächenstück mit positivem T zur Linken und eins mit negativem T zur Rechten der Fortschrittsrichtung liegt (was nur bei einer Spaltung der Linie $T = 0$ auf mehrere Arten geschehen kann). In dieser Weise gehe man fort, bis man wieder an den Kreis $r = r_0$ gelangt. Dann hat man beim Austritt aus dem Innern des Teils $T > 0$ zur Linken, also beim Eintritt umgekehrt zur Rechten. Also gehört der Punkt zu der Reihe $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \cdots, \{2n\}$, durch die man bei wachsendem ϱ von negativen zu positiven Werten von T übergeht. Nun sahen wir am Schlusse von § 107, daß in den Punkten $\{1\}, \{3\}, \{5\}, \cdots$ U positiv, und in den Punkten $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \cdots$ U negativ ist. Die von uns durchlaufene Linie $(\{1\} \cdots \{2\varkappa\})$, für deren Punkte $T = 0$ war, beginnt also mit einer Stelle, in der $U > 0$, und endet mit einer solchen, in der $U < 0$ ist. Folglich hat man beim Durchlaufen mindestens eine Stelle passiert, in der $U = 0$ ist, d. h. da in ihr auch $T = 0$ wird, einen Wurzelpunkt von $f(x)$.

Hierdurch haben wir den Beweis für die Existenz einer Wurzel geliefert. Seine Stärke beruht in der großen Anschaulichkeit der Schlüsse; seine Schwäche in der als selbstverständlich angenommenen Identität geometrischer und analytischer Stetigkeit. Auf die hierbei auftretenden Schwierigkeiten haben wir schon oben (§ 30, S. 33) aufmerksam gemacht.

§ 109. Auf ganz anderen Überlegungen beruht ein von Cauchy gegebener Beweis der Wurzelexistenz (Analyse algébrique, 1821, chap. X, p. 329 ff.). Cauchy geht so vor.

Gesetzt, $f(x) = 0$ sei die zu lösende algebraische Gleichung n^{ten} Grades, und x_0 irgendein konstanter Wert. Wäre $f(x_0) = 0$, so hätten wir in x_0 bereits eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Wir nehmen also an, es wäre $f(x_0) \neq 0$. Ferner möge $f^{(\lambda)}(x_0)$ die erste nicht verschwindende der Ableitungen

$$f'(x_0),\ f''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) \qquad \text{(7a)}$$

sein. Daß diese Reihe nicht aus lauter verschwindenden Gliedern besteht, folgt aus (7) § 32, S. 37. Denn es wäre sonst

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1} + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!},$$

woraus unter dieser Annahme folgen würde, daß $f(x_0+h)$ unabhängig von h, also eine Konstante wäre. Man erhält nun, wenn $f^{(\lambda)}(x_0)$ das niedrigste von Null verschiedene Glied aus (7a) bedeutet,

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = 1 + \frac{f^{(\lambda)}(x_0)}{\lambda!\,f(x_0)}h^\lambda + \frac{f^{(\lambda+1)}(x_0)}{(\lambda+1)!\,f(x_0)}h^{\lambda+1} + \cdots,$$

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right| \leqq \left|1 + \frac{f^{(\lambda)}(x_0)}{\lambda!\,f(x_0)}h^\lambda\right| + \left|\frac{f^{(\lambda+1)}(x_0)}{(\lambda+1)!\,f(x_0)}h^{\lambda+1}\right| + \cdots$$

und wenn wir die Normalformen für komplexe Größen einführen,

$$h = \varrho\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\omega, \quad \frac{f^{(\varkappa)}(x_0)}{\varkappa!\,f(x_0)} = t_\varkappa\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\tau_\varkappa \quad (\varkappa = \lambda, \lambda+1, \ldots, n),$$

dann ergibt sich

$$(8)\qquad \left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right| \leq \left|1 + t_\lambda\varrho^\lambda\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}(\lambda\omega+\tau_\lambda)\right| + t_{\lambda+1}\varrho^{\lambda+1} + t_{\lambda+2}\varrho^{\lambda+2} + \cdots.$$

Zunächst setzen wir $\omega = \frac{\pi-\tau_\lambda}{\lambda}$, also

$$\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}(\lambda\omega+\tau_\lambda) = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\pi = -1,$$

und beschränken ϱ durch die Bedingung

$$t_\lambda\varrho^\lambda < 1, \quad \text{also} \quad \varrho < \sqrt[\lambda]{\frac{1}{t_\lambda}}.$$

Dadurch entsteht als erstes Glied der rechten Seite von (8)

$$|1 - t_\lambda\varrho^\lambda| = 1 - t_\lambda\varrho^\lambda$$

und daraus

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right| \leqq 1 - t_\lambda\varrho^\lambda + t_{\lambda+1}\varrho^{\lambda+1} + t_{\lambda+2}\varrho^{\lambda+2} + \cdots$$

$$\leqq 1 - t_\lambda\varrho^\lambda\left(1 - \frac{t_{\lambda+1}}{t_\lambda}\varrho - \frac{t_{\lambda+2}}{t_\lambda}\varrho^2 + \cdots\right).$$

Jetzt verfügen wir, was nach § 32, S. 37 stets möglich ist, über die Größe ϱ derart, daß die letzte Klammer positiv ist, die rechte Seite daher < 1 wird. Die linke Seite ist ihrer Natur nach positiv; demnach erhalten wir für hinreichend kleine Werte von ϱ

$$|f(x_0+h)| < |f(x_0)| \quad \left(h = \varrho\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\frac{\pi-\tau_\lambda}{\lambda};\ |f(x_0)| > 0\right).$$

Gesetzt nun, die Funktion $|f(x)|$ nehme an irgendeiner Stelle einen Minimalwert an, etwa für $x = x_0$, so muß $|f(x_0)| = 0$ sein, da sonst die letzte Relation zu dem Widerspruche leiten würde, daß $(x_0 + h)$ auf eine Norm $|f(x_0 + h)|$ führt, die kleiner ist als $|f(x_0)|$. Aus $|f(x_0)| = 0$ folgt dann sofort $f(x_0) = 0$; d. h. x_0 ist eine Wurzel von $f(x) = 0$. Auf diese Weise ist das Bestehen einer Wurzel von $f(x)$ nachgewiesen.

§ 110. Hierbei ist zu bemerken, daß dieser Beweis das Bestehen eines Minimums für den absoluten Betrag von $f(x)$ voraussetzt. Das ist aber keine selbstverständliche Annahme. Ist z. B. der Inbegriff aller reellen unechten Brüche vorgelegt, so gibt es in diesem Zahlensystem, zu dem ja die Einheit nicht gehört, kein Minimum. Wir wollen etwas genauer auf diese Verhältnisse eingehen.

Ist ein System S von reellen Zahlen gegeben, die sich nicht ins negativ Unendliche erstrecken, dann gibt es eine Zahl g von folgender Beschaffenheit:

I. Im Intervalle $(-\infty \cdots g)$ kommt keine Zahl von S vor; und
II. entweder a) g gehört zu S;
oder b) in jedem Intervalle $(g \cdots g + \delta)$ bei jedem positiven, noch so kleinen δ liegen Zahlen, die zu S gehören.

Dieses g heißt die untere Grenze für S, und im Falle IIa das Minimum von S.

In der Tat, es reicht aus, um dies einzusehen, einen Dedekindschen Schnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ zu konstruieren, wo $\mathfrak{A}$ alle Zahlen α umfaßt, für die das Intervall $(-\omega \cdots \alpha)$ keine Zahl aus S umschließt, und $\mathfrak{B}$ alle Zahlen β, für die das Intervall $(-\omega \cdots \beta)$ Zahlen aus S umschließt. Dann ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = g$, wie sofort ersichtlich ist.

Ist S' ein Teil von S, so hat auch S' eine untere Grenze g', die $\geqq g$ ist. Auch das sieht man sofort. Vgl. Grundlehren I, S. 331.

§ 111. Für unsere Zwecke ist es erforderlich, folgenden Satz zu beweisen: Wenn δ eine beliebig kleine positive Größe < 1 bedeutet, dann kann man eine absolute Zahl $r_0 > 1$ von der Eigenschaft bestimmen, daß für alle Werte von x, deren absoluter Betrag größer ist als r_0, der absolute Betrag der ganzen Funktion

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

gleich einem Produkte

$$|a_0 x^n| \cdot (1 + \sigma) \qquad (|\sigma| < \delta)$$

wird. Aus der Gleichung folgt zunächst für jedes x

$$\frac{f(x)}{a_n x^n} \qquad 1 + \frac{a_1}{a_0} x^{-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{-2} + \qquad + \frac{a_n}{a_0} x^{-n}$$

und daraus

$$1 - \frac{a_1}{-} x^{-1} \qquad \frac{a_2}{a_n} x^{-2} \qquad\qquad \frac{a_n}{a_0} x^{-} \qquad \frac{f(x)}{a_n x^n}$$

und

$$\frac{f(x)}{a_0 x^n} \leqq 1 + \frac{a_1}{-} x^{-1} + \frac{a_2}{-} x^{-2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0} x^{-n}$$

Ist nun ϱ der größte Wert unter

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \quad \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \quad \ldots, \quad \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \qquad\qquad (a_0 \neq 0),$$

so liefert seine Einführung

$$1 - \varrho\left(|x^{-1}| + |x^{-2}| + \cdots + |x^{-n}|\right) \leqq \left|\frac{f(x)}{a_0 x^n}\right|;$$

$$\frac{f(x)}{a_0 x^n} \leqq 1 + \varrho\left(|x^{-1}| + |x^{-2}| + \cdots + |x^{-n}|\right),$$

und da $|x| > 1$ und gleichzeitig $|x| > r_0$ ist,

$$1 - \frac{\varrho}{r_0 - 1} \leqq 1 - \frac{\varrho}{|x| - 1} \leqq \left|\frac{f(x)}{a_0 x^n}\right| \leqq 1 + \frac{\varrho}{|x| - 1} \leqq 1 - \frac{\varrho}{r_0 - 1}.$$

Setzt man jetzt

$$r_0 > 1 + \frac{\varrho}{\delta} \qquad\qquad \left(|x| > r_0 > 1 + \frac{\varrho}{\delta}\right),$$

so kommt man auf

$$1 - \delta \leqq \left|\frac{f(x)}{a_0 x^n}\right| \leqq 1 + \delta,$$

$$|a_0 x^n|(1 - \delta) \leqq |f(x)| \leqq (1 + \delta)|a_0 x^n|,$$

$$|f(x)| = |a_0 x^n|(1 + \sigma) \qquad\qquad (|\sigma| < \delta).$$

Hierdurch ist die Richtigkeit des behaupteten Satzes nachgewiesen. Wir können ihn auch so aussprechen, indem wir ihn in geometrische Form kleiden: $f(x)$ kann außerhalb eines mit dem Radius r_0 um den Koordinatenanfangspunkt O geschlagenen Kreises für keinen Wert von x verschwinden. Ferner können wir diesen Kreis durch ein Quadrat mit den Ecken (r_0, r_0), $(-r_0, r_0)$, $(-r_0, -r_0)$, $(r_0, -r_0)$ setzen; denn das Quadrat schließt ja den Kreis vollkommen ein, da die Seiten des Quadrats Kreistangenten sind. Ebenso ergibt sich, daß die untere Grenze des absoluten Betrages $|f(x)|$ im Innern des Kreises und des Quadrates zu suchen ist.

§ 112. Nun ist es leicht zu zeigen, daß diese untere Grenze von $|f(x)|$ ein Minimum ist, also für einen Wert von $x = y + iz$ auch wirk-

lich erreicht wird. Sie hat den Wert 0. Nun sei $P_0 Q_0 R_0 S_0$ das im vorigen Paragraphen definierte Quadrat von der Seitenlänge $2r_0$. In seinem Innern liegen Punkte (y/z), für die $|f(y+iz)|$ der Grenze Null beliebig nahe kommt. Durch Parallele zu den Seiten teilen wir $P_0 Q_0 R_0 S_0$ in vier kongruente Quadrate von der Seitenlänge r_0. Mindestens eins dieser vier Quadrate enthält dann Punkte (y/z), für die $|f(x)|$ beliebig klein wird, in seinem Innern oder auf seiner Begrenzung, soweit diese nicht zugleich zur Begrenzung von $P_0 Q_0 R_0 S_0$ gehört. Das Quadrat mit dieser Grenze sei $P_1 Q_1 R_1 S_1$, seine Seitenlänge ist r_0.

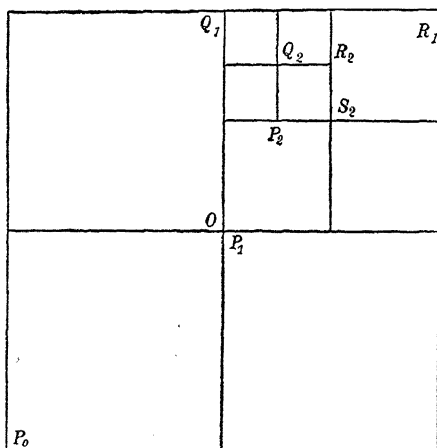



Fig. 7.

Dieses Quadrat zerlegen wir wieder durch Parallele zu den Seiten in vier kleinere, von denen wenigstens eins $P_2 Q_2 R_2 S_2$ Punkte der oben angegebenen Eigenschaft besitzt und deren Seitenlänge $\frac{1}{2} r_0$ beträgt. So können wir fortfahren und kommen zu Quadraten $P_\alpha Q_\alpha R_\alpha S_\alpha$ von der Seitenlänge

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} r_0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

die demnach beliebig klein gemacht werden kann.

Wir bezeichnen die Koordinaten von P_α durch η_α und ζ_α, die von R_α durch η'_α und ζ'_α; dann definiert die aufsteigende Folge

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_\alpha, \eta_{\alpha+1}, \ldots \qquad (\eta_{\varkappa+1} \geqq \eta_\varkappa)$$

zusammen mit der absteigenden

$$\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \ldots, \eta'_\alpha, \eta'_{\alpha+1}, \ldots \qquad (\eta'_{\varkappa+1} \leqq \eta'_\varkappa)$$

wegen

$$\eta'_\varkappa - \eta_\varkappa = \frac{1}{2^{\varkappa-1}} r_0$$

einen Dedekindschen Schnitt, dessen Wert wir durch $y = A$ bezeichnen.

In ähnlicher Art definieren wir den Wert $z = B$ mittels des Schnittes, der durch die beiden Folgen

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots \quad \text{und} \quad \zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3, \ldots$$

bestimmt ist.

Dann liegt der Punkt $x = y + iz = A + iB$ in einem jeden der Quadrate

$$P_\alpha Q_\alpha R_\alpha S_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nun kann man wegen der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ ein Quadrat $P_\nu Q_\nu R_\nu S_\nu$ angeben, dessen Punkte $x = y + iz$ sämtlich die Ungleichung befriedigen

$$|f(x)| - |f(A + Bi)| < \delta,$$

in der δ eine beliebig kleine vorgegebene Größe bedeutet. Andererseits gibt es in $P_\nu Q_\nu R_\nu S_\nu$ mindestens einen Punkt $x = \xi$, für den

$$|f(\xi)| < \delta$$

ist. Aus den letzten beiden Relationen folgt

$$|f(A + Bi)| < 2\delta,$$

wie man erkennt, wenn man in der ersten der beiden Ungleichungen das noch allgemeine x durch den in der zweiten auftretenden Sonderwert ξ ersetzt und die so entstandene Ungleichung zur letzten addiert. In dem so erhaltenen Resultate steht auf der linken Seite eine Konstante, auf der rechten eine Variable, die beliebig klein gemacht werden kann. Das ist nur möglich, wenn

$$|f(A + Bi)| = 0, \quad \text{also} \quad f(A + Bi) = 0$$

ist, d. h. wenn $x = A + Bi$ eine Wurzel von $f(x) = 0$ wird.

Die untere Grenze der Werte von $|f(x)|$ wird daher durch $x = A + Bi$ wirklich erreicht, d. h. diese untere Grenze ist ein Minimum; die Lücke im Cauchyschen Beweise ist damit ausgefüllt, und die Wurzelexistenz für algebraische Gleichungen in aller Strenge bewiesen.

§ 113. Eine Reihe anderer Beweise benutzt die vollständige Induktion; derart, daß der Beweis für Gleichungen des Grades $2^\nu(2\varkappa + 1)$ zurückgeführt wird auf den für Gleichungen des Grades $2^{\nu-1}(2\lambda + 1)$. Wendet man die Methode dieser Überführung mehrfach hintereinander an, so gelangt man schließlich zu einer Gleichung ungeraden Grades und dadurch zum Beweise des allgemeinen Theorems der Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen.

Der erste derartige Beweis stammt von C. F. Gauß: Werke III, p. 31, vgl. S. 127. An späteren Beweisen der gleichen Kategorie sind zu nennen der von W. K. Clifford, den Walecki nochmals gefunden hat (Nouv. Ann. de Math. (3) II, p. 241, 1883), und der von P. Gordan (Math. Ann. X, p. 572).

§ 114. Wir haben früher bereits gesehen (§ 42; § 62), daß, wenn x_1 eine Wurzel von $f(x)=0$ ist, dann das Gleichungspolynom $f(x)$ durch den „Wurzelfaktor" $(x-x_1)$ teilbar ist,

$$f(x)=(x-x_1)f_1(x).$$

Ist weiter x_2 eine Wurzel der Gleichung $f_1(x)=0$, dann ist

$$f_1(x)=(x-x_2)f_2(x);$$

daraus folgt

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)f_2(x)$$

usf. bis zu

$$f(x)=c_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n).$$

Die n Wurzeln brauchen nicht voneinander verschieden zu sein. Faßt man die einander gleichen Wurzelfaktoren zusammen, dann wird die letzte Gleichung die Form annehmen

$$f(x)=c_0(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_\varrho)^{r_\varrho}\quad(r_1+r_2+\cdots+r_\varrho=n),$$

wobei die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ untereinander verschieden sind (siehe § 63) und jedes x_α eine Wurzel von der Multiplizität r_α darstellt. Sind alle Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ reell, und ist $x_1=a+bi$ eine Wurzel von $f=0$, so ist $x_2=a-bi$ auch eine solche, und zwar sind beide von gleicher Multiplizität (siehe § 56).

Neuntes Kapitel.

Einwertige und zweiwertige Funktionen.

§ 115. Aus dem Vorhandensein auch nur einer Wurzel der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades

$$(1)\qquad f(x)\equiv x^n-c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}-\cdots\pm c_n=0$$

ergibt sich leicht die Zerlegung von $f(x)$ in n lineare Faktoren (§ 114), so daß man schreiben kann

$$(2)\qquad f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n).$$

Multipliziert man hier die rechte Seite aus und setzt die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x den entsprechenden durch (1) gegebenen gleich, so erhält man das System

$$
(3) \qquad \begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & c_1, \\
x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n & c_2, \\
x_1 x_2 x_3 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n & c_3, \\
\\
x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n &
\end{cases}
$$

Diese Formeln geben die Koeffizienten der Gleichung n^{ten} Grades als Funktionen ihrer n Wurzeln.

§ 116. Wir wollen jetzt annehmen, die n Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien unbestimmt, so daß zwischen ihnen keine nicht identische Relation

$$(4) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$$

besteht. Wir betrachten nun die linken Seiten der Gleichungen (3) und erkennen sofort, daß sie bei jeder beliebigen Umstellung der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ untereinander, also bei jeder Permutation dieser Elemente ungeändert bleiben. Funktionen, die diese Eigenschaft besitzen, nennt man symmetrische oder einwertige Funktionen. Neben diese treten die mehrwertigen Funktionen, die nach der Anzahl ihrer durch die Permutationen der Elemente hervorgerufenen Werte eingeteilt werden können. So hat man z. B. in den drei Funktionen von vier Größen x_1, x_2, x_3, x_4 der Reihe nach

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4); \quad x_1 x_2 + x_3 x_4; \quad x_1$$

eine zweiwertige, eine dreiwertige und eine vierwertige Funktion. Der zweite Wert der ersten Funktion ist gleich dem negativ genommenen ersten; die weiteren Werte der zweiten Funktion sind

$$x_1 x_3 + x_1 x_4 \quad \text{und} \quad x_1 x_4 + x_2 x_3,$$

und die der dritten obigen Funktion natürlich x_2, x_3, x_4.

§ 117. Aus dem Begriffe der symmetrischen Funktionen folgt, daß, wenn das Potenzprodukt

$$q x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

als Summand einer symmetrischen Funktion auftritt, dann auch jedes Potenzprodukt von der Gestalt

$$q x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} x_{i_3}^{\alpha_3} \ldots x_{i_n}^{\alpha_n}$$

als Summand in dieser Funktion vorkommt, wo $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ jede beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ bedeuten soll. Sind die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ sämtlich untereinander verschieden, so umfaßt die symmetrische Bildung $n!$ Summanden; sind unter den

Exponenten ν_1 gleiche einer Art, ν_2 gleiche einer zweiten Art usf., so umfaßt die symmetrische Bildung nur

$$\frac{n}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots}$$

Summanden. Die hieraus gebildete Summe bezeichnen wir durch das Symbol

$$qS(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\ldots x_n^{\alpha_n}),$$

und nennen sie eine eintypige symmetrische Funktion. Offenbar ist jede ganze symmetrische Funktion als Aggregat von eintypigen symmetrischen darstellbar.

Unter Benutzung der neu eingeführten Bezeichnung können wir die Funktionen auf den linken Seiten von (3) schreiben

$$\text{(3a)}\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n = S(x_1) = S(x_\alpha), \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\cdots = S(x_1x_2) = S(x_\alpha x_\beta), \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots = S(x_1x_2x_3) = S(x_\alpha x_\beta x_\gamma), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2x_3\ldots x_n = S(x_1x_2\ldots x_n) = S(x_\alpha x_\beta\ldots x_\delta). \end{cases}$$

Diese n Funktionen wollen wir die n elementaren symmetrischen Funktionen nennen.

§ 118. Neben sie treten, als gleichfalls ihrer Bildung nach besonders einfach, die Potenzsummen der x_α

$$x_1^\varkappa+x_2^\varkappa+x_3^\varkappa+\cdots+x_n^\varkappa = S(x_1^\varkappa) = S(x_\alpha^\varkappa) \quad (\varkappa=0,1,2,3,\ldots),$$

die wir einfacher mit $s_\varkappa$ bezeichnen wollen. Dabei ist der Analogie wegen $s_0=n$ zu setzen.

Wir wollen nachweisen, daß die $s_\varkappa$ sämtlich als ganze ganzzahlige Funktionen der elementaren symmetrischen Funktionen $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ darstellbar sind.

Aus (1) und (2) folgt sofort die Gleichungsreihe

$$\begin{aligned} f(x_\lambda) &\equiv x_\lambda^n - c_1x_\lambda^{n-1} + c_2x_\lambda^{n-2} - c_3x_\lambda^{n-3} + \cdots \pm c_n = 0, \\ x_\lambda f(x_\lambda) &\equiv x_\lambda^{n+1} - c_1x_\lambda^n + c_2x_\lambda^{n-1} - c_3x_\lambda^{n-2} + \cdots \pm c_nx_\lambda = 0, \\ x_\lambda^2 f(x_\lambda) &\equiv x_\lambda^{n+2} - c_1x_\lambda^{n+1} + c_2x_\lambda^n - c_3x_\lambda^{n-1} + \cdots \pm c_nx_\lambda^2 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$(\lambda=1,2,3,\ldots,n).$$

Setzt man hierin für λ die Werte $1, 2, 3, \ldots, n$ ein und summiert

die zu jeder einzelnen Zeile gehörigen Resultate, so ergibt sich die Gleichungsreihe

$$\begin{aligned}
&s_n \quad - c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} - c_3 s_{n-3} + \cdots \pm c_n s_0 = 0,\\
&s_{n+1} - c_1 s_n \quad + c_2 s_{n-1} - c_3 s_{n-2} + \cdots \pm c_n s_1 = 0,\\
&s_{n+2} - c_1 s_{n+1} + c_2 s_n \quad - c_3 s_{n-1} + \cdots \pm c_n s_2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

oder zusammengefaßt

$$s_\alpha = c_1 s_{\alpha-1} - c_2 s_{\alpha-2} + c_3 s_{\alpha-3} - \cdots \pm c_n s_{\alpha-n} \tag{5}$$
$$(\alpha = n, n+1, n+2, \ldots).$$

Diese Relationen zeigen, daß man jedes s_α, dessen Index α größer ist als $(n-1)$, durch die $(n-1)$ vorhergehenden Funktionen $s_{\alpha-1}$, $s_{\alpha-2}, \ldots, s_{\alpha-n}$ und die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ darstellen kann. Danach ist s_n durch $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ und die c_α ausdrückbar; s_{n+1} zunächst durch $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ nebst den c_α und dann wegen des ersten Resultates auch durch die $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ und die c_α usw. Man erhält sonach für $s_\varkappa$

$$s_\varkappa = F_\varkappa(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{\varkappa-1}; c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

In dieser Formel kann natürlich der Index $\varkappa$ jeden positiven beliebigen Wert annehmen; und unter den $F_\varkappa$ sind ganze rationale Funktionen zu verstehen.

Für die $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{\varkappa-1}$ leiten wir Formeln, die (5) entsprechen, folgendermaßen her:

Die elementaren symmetrischen Funktionen der $(n-1)$ Größen

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_{\varkappa-1}, \ x_{\varkappa+1}, \ \ldots, \ x_n$$

bezeichnen wir für den Augenblick durch die Symbole

$$c_1^{(\varkappa)}, \ c_2^{(\varkappa)}, \ c_3^{(\varkappa)}, \ \ldots, \ c_n^{(\varkappa)};$$

zwischen ihnen und den elementaren symmetrischen Funktionen (3) der $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, also den

$$c_1, \ c_2, \ c_3, \ \ldots, \ c_n,$$

bestehen folgende Relationen, deren Richtigkeit ohne weiteres ersichtlich ist,

$$\begin{aligned}
c_1 &= c_1^{(\varkappa)} + x_\varkappa,\\
c_2 &= c_2^{(\varkappa)} + x_\varkappa c_1^{(\varkappa)},\\
c_3 &= c_3^{(\varkappa)} + x_\varkappa c_2^{(\varkappa)},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
c_n &= \qquad\quad x_\varkappa c_{n-1}^{(\varkappa)}.
\end{aligned}$$

Durch sie findet man sofort die Gleichung

$$(5a)\quad \begin{aligned} x_\varkappa^\alpha - c_1 x_\varkappa^{\alpha-1} + c_2 x_\varkappa^{\alpha-2} - \cdots \pm c_\alpha = x_\varkappa^\alpha - (c_1^{(\varkappa)} + x_\varkappa) x_\varkappa^{\alpha-1} + \\ + (c_2^{(\varkappa)} + x_\varkappa c_1^{(\varkappa)}) x_n^{\alpha-2} - \qquad \pm c_\alpha^{(\varkappa)} \\ (\alpha \leqq n). \end{aligned}$$

Setzt man hierin der Reihe nach $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, n$ und summiert die erhaltenen n Resultate, so entsteht die Gleichung

$$s_\alpha - c_1 s_{\alpha-1} + c_2 s_{\alpha-2} - \cdots \pm c_\alpha s_0 = \pm (c_\alpha^{(1)} + c_\alpha^{(2)} + \cdots + c_\alpha^{(n)}).$$

Die Klammergröße auf der rechten Seite enthält nur Summanden von der Produktform $x_1 x_2 \ldots x_\alpha$ und alle so gebildeten; jeder solche tritt $(n-\alpha)$-mal auf; der eben angegebene z. B. je einmal in $c_\alpha^{(\alpha+1)}$, $c_\alpha^{(\alpha+2)}, \ldots, c_\alpha^{(n)}$. Folglich hat die Klammer den Wert $(n-\alpha) c_\alpha$, und die letzte Formel geht in das Schlußresultat

$$(6)\qquad s_\alpha - c_1 s_{\alpha-1} + c_2 s_{\alpha-2} - c_3 s_{\alpha-3} + \cdots \pm \alpha c_\alpha = 0 \qquad (\alpha \leqq n)$$

über. Man hat also für die kleinsten Werte des Index α die Bestimmungen

$$(7)\qquad \begin{cases} s_1 - c_1 = 0, \\ s_2 - c_1 s_1 + 2c_2 = 0, \\ s_3 - c_1 s_2 + c_2 s_1 - 3c_3 = 0, \\ \quad \\ s_n - c_1 s_{n-1} + c_2 s_{n-2} - \cdots \pm c_n n = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich der Reihe nach durch Einsetzung

$$(8)\qquad \begin{cases} s_1 = c_1, \\ s_2 = c_1^2 - 2c_2, \\ s_3 = c_1^3 - 3c_1 c_2 + 3c_3, \\ s_4 = c_1^4 - 4c_1^2 c_2 + 4c_1 c_3 + 2c_2^2 - 4c_4, \\ s_5 = c_1^5 - 5c_1^3 c_2 + 5c_1^2 c_3 + 5c_1 c_2^2 - 5c_1 c_4 - 5c_2 c_3 + 5c_5, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Setzt man diese Formeln bis s_n fort und wendet dann (6) für s_{n-1}, $s_{n-2}, \ldots$ an, so folgt die Richtigkeit des zu Anfang des Paragraphen behaupteten Satzes: Alle Potenzsummen s_α sind als ganze ganzzahlige Funktionen der elementaren symmetrischen Funktionen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ darstellbar.

Aus (7) findet man umgekehrt die Darstellung der c durch die s in folgender Form:

$$(9)\begin{cases} 1!\,c_1 = s_1, \\ 2!\,c_2 = s_1^2 - s_2, \\ 3!\,c_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3, \\ 4!\,c_4 = s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_4, \\ 5!\,c_5 = s_1^5 - 10s_1^3s_2 + 20s_1^2s_3 + 15s_1s_2^2 - 30s_1s_4 - 20s_2s_3 + 24s_5, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sind ganze, aber nicht ganzzahlige Funktionen der $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n$.

Daß in allen Gleichungen (9) mit Ausnahme der ersten die Summe der Koeffizienten der rechten Seiten gleich Null wird, folgt aus der Annahme der Spezialwerte für die x_α

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0;$$

denn dafür gilt die Reihe von Gleichungen

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0; \quad s_1 = s_2 = s_3 = \cdots = 1,$$

und die Substitution dieser Werte in (9) liefert den Beweis des behaupteten Satzes.

§ 119. Das Theorem aus § 118 ist ein Spezialfall des folgenden: Jede ganze ganzzahlig-symmetrische Funktion ist als ganze ganzzahlige Funktion der elementaren symmetrischen Funktionen darstellbar. Wir geben dafür den Gaußschen Beweis (Werke, Bd. III, p. 36).

Von den beiden Potenzprodukten

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n} \quad \text{und} \quad x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n}$$

legen wir dem ersten oder dem zweiten die höhere Ordnung bei, je nachdem die erste nicht verschwindende unter den Differenzen

$$m_1 - \mu_1, \quad m_2 - \mu_2, \quad \ldots, \quad m_n - \mu_n$$

positiv oder negativ ist. Dann gelten folgende vier Sätze, auf die der Beweis des obigen Theorems sich stützt:

I. Haben zwei Potenzprodukte dieselbe Ordnung, so sind ihre Exponenten der Reihe nach einander gleich; es ist somit bei gleicher Ordnung

$$m_1 = \mu_1, \quad m_2 = \mu_2, \quad \ldots, \quad m_n = \mu_n.$$

II. Unter den Potenzprodukten, die mit dem vorgelegten

$$(10) \qquad x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$$

gleiche Dimension $(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$ haben, ist nur eine endliche Anzahl von niederer Ordnung als (10). Denn die Vorschrift über die

Gleichheit der Dimensionen beschränkt die Höhe der Exponenten auf endliche Grenzen.

III. Dasjenige Glied aus der symmetrischen Summe

$$S(x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}) \tag{11}$$

ist von höchster Ordnung unter allen in (11) vorkommenden, bei dem x_1 den höchsten oder einen der höchsten, x_2 den nächsthohen Exponenten hat usf. Hat man also die Beziehungen

$$m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \geqq \cdots \geqq m_n \tag{12}$$

der m_α untereinander, so ist (10) das Glied höchster Ordnung in (11); und damit (10) das Glied höchster Ordnung unter denen von (11) sei, muß (12) gelten.

IV. Die Glieder höchster Ordnung, die in den elementaren symmetrischen Funktionen

$$c_1, \; c_2, \; c_3, \; \ldots, \; c_n$$

vorkommen, sind entsprechend

$$x_1, \; x_1 x_2, \; x_1 x_2 x_3, \; \ldots, \; x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.$$

Demnach ist

$$c_1^{m_1 - m_2} c_2^{m_2 - m_3} \ldots c_n^{m_n}$$

$$= x_1^{m_1 - m_2} (x_1 x_2)^{m_2 - m_3} \ldots (x_1 x_2 \ldots x_n)^{m_n} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \ldots x_n^{m_n}$$

mit Unterdrückung der Glieder niederer Ordnung.

§ 120. Nach diesen Vorbereitungen führen wir den Beweis unseres Satzes aus § 119 so: Es sei $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine ganze ganzzahlige symmetrische Funktion der x_α, so kann diese so zubereitet angenommen werden, daß nur ein einziges Glied höchster Ordnung in ihr vorkommt; kommen nämlich mehrere von gleicher höchster Ordnung in F vor, so lassen sich diese nach I zu einem einzigen Gliede zusammenfassen. Dieses sei nun etwa

$$\alpha x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \ldots x_n^{m_n} \qquad (m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \geqq \cdots);$$

dann bilden wir die symmetrische Funktion

$$F_1 = F - \alpha c_1^{m_1 - m_2} c_2^{m_2 - m_3} \ldots. \tag{13}$$

Die Dimension von F_1 ist höchstens gleich der von F; es ist F_1 ganzzahlig; das Glied höchster Ordnung von F_1 ist von niederer Ordnung als das Glied höchster Ordnung von F.

Das Glied höchster Ordnung von F_1 sei nun

$$\beta x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3} \ldots x_n^{p_n} \qquad (p_1 \geqq p_2 \geqq p_3 \geqq \cdots \geqq p_n);$$

dann bilden wir die symmetrische Funktion

$$F_2 = F_1 - \beta c_1^{p_1 - p_2} c_2^{p_2 - p_3} \ldots c_n^{p_n},$$

deren Dimension höchstens gleich der von F_1 ist, während das Glied höchster Ordnung aus F_1 sicher in F_2 weggefallen ist. Nach II wird die Fortführung dieser Operation ein Ende haben, d. h. es muß einmal ein F verschwinden, und die entsprechende Gleichung wird zu

$$0 = F_1 - \varrho c_1^{q_1 - q_2} c_2^{q_2 - q_3} \dots c_n^{q_n}$$

werden. Die Addition aller so erhaltenen Gleichungen liefert

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha c_1^{m_1 - m_2} + \dots + \beta c_1^{p_1 - p_2} + \dots + \varrho c_1^{q_1 - q_2} \dots;$$

und damit ist der behauptete Satz erwiesen und zugleich durch ihn eine Darstellungsmethode gegeben.

§ 121. Als Beispiel führen wir die Umwandlung der Funktion in den Elementen x

$$F \equiv S(x_1^2 x_2^2 x_3)$$

in eine Funktion der c_λ durch. F hat als Glied höchster Ordnung $x_1^2 x_2^2 x_3$; und wegen $m_1 = 2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$ wird sich zunächst ergeben, der Gleichung (13) entsprechend,

$$F_1 = S(x_1^2 x_2^2 x_3) - c_2 c_3 = F - c_2 c_3. \tag{14}$$

Nun ist

$$c_2 c_3 = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n)(x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n);$$

multipliziert man aus, so kommt man auf das Resultat

$$c_2 c_3 = \alpha S(x_1^2 x_2^2 x_3) + \beta S(x_1^2 x_2 x_3 x_4) + \gamma S(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5),$$

wo die Zerlegung in eintypige Funktionen durchgeführt ist. Die Koeffizienten α, β, γ geben an, auf wieviele Arten bei der Multiplikation ein Glied von der Form

$$x_i^2 x_k^2 x_l; \quad x_i^2 x_k x_l x_p; \quad x_i x_k x_l x_p x_q$$

entsteht. Man sieht leicht, daß hier $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 10$ wird. Demnach ist, da die Glieder erster Art das gesamte F bilden,

$$F_1 = -3 S(x_1^2 x_2 x_3 x_4) - 10 S(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5).$$

Hierin lautet das Glied höchster Ordnung $x_1^2 x_2 x_3 x_4$; also ist $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = m_4 = 1$ und

$$F_2 = F_1 + 3 c_1 c_4. \tag{15}$$

Hierin ist

$$c_1 c_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)(x_1 x_2 x_3 x_4 + \dots + x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n)$$
$$= \delta S(x_1^2 x_2 x_3 x_4) + \varepsilon S(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5),$$

und für δ und ε findet man die Werte 1 und 5, also

$$(16)\qquad F_2 = 5S(x_1x_2x_3x_4x_5) = 5c_5.$$

Addiert man (14), (15), (16), so gelangt man zu dem Schlußresultate in der Darstellung

$$S(x_1^2x_2^2x_3) = c_2c_3 - 3c_1c_4 + 5c_5.$$

§ 122. Um derartige verwickelte Rechnungen unnötig zu machen oder doch wenigstens nach Möglichkeit einzuschränken, hat man Tabellen entworfen, welche die eintypigen $S(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n})$ durch die c_λ ausgedrückt angeben.[1]) Diese Tabellen sind nach der Dimensionshöhe $(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$ angeordnet.

Ist die eintypige symmetrische Funktion

$$(17)\qquad S(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}) = \sum \alpha \cdot c_1^{q_1}c_2^{q_2}\ldots c_n^{q_n},$$

wobei α den Zahlenkoeffizienten bezeichnet, der zu dem folgenden Potenzprodukte der c_λ gehört, und setzt man hierin $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$ statt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein, so gehen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ in

$$x_1t + x_2t + \cdots + x_nt = tc_1,\quad x_1x_2t^2 + x_1x_3t^2 + \cdots + x_{n-1}x_nt^2 = t^2c_2,$$
$$x_1x_2x_3t^3 + x_1x_2x_4t^3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_nt^3 = t^3c_3,\ \ldots,$$

und (17) geht dabei in

$$t^{m_1+\cdots+m_n}S(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}) = \sum t^{q_1+2q_2+\cdots+nq_n}\cdot \alpha c_1^{q_1}c_2^{q_2}\ldots c_n^{q_n}$$

über. Daraus kann man schließen, daß für jedes Glied der rechten Seite von (17)

$$(17\text{a})\qquad q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots + nq_n = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$$

sein muß. Die Summe der Produkte aus den Indizes in die Exponenten jedes Faktors von

$$c_1^{q_1}c_2^{q_2}c_3^{q_3}\ldots c_n^{q_n}$$

haben wir § 20 als das Gewicht des Potenzproduktes bezeichnet. Besitzen nun alle Summanden eines Aggregates gleiches Gewicht, so nannten wir das Aggregat isobarisch[1]) (§ 20, S. 24). Folglich ist die rechte Seite von (17) eine isobarische Funktion vom Gewichte $(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$ in den $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Es reicht also aus, auf die rechte Seite von (17) nur solche Potenzprodukte der c_λ zu setzen, deren Exponenten alle ganzzahlige Lösungen von (17) sind.

---

1) Faà di Bruno, Binäre Formen; Salmon, Modern higher Algebra.

Ist z. B. die Dimension $(m_1 + m_2 + \cdots)$ von $S(x_1^{m_1} \ldots)$ gleich 7 so findet man für die q_α die Tabelle von Zahlenkombinationen

q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
7	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
1	3	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	0	2	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	2	3	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1

so daß jede symmetrische Funktion der Dimension 7 auf die Form gebracht werden kann

$$\alpha c_1^7 + \beta c_1^5 c_2 + \gamma c_1^4 c_3 + \delta c_1^3 c_2^2 + \varepsilon c_1^3 c_4 + \cdots + \sigma c_3 c_4 + \tau c_7,$$

in der die Größen $\alpha, \beta, \ldots, \sigma, \tau$ Zahlkoeffizienten sind.

Hiernach wird die Bedeutung der folgenden Tabellen klar sein.

	c_1
$S(x_1)$	1

	c_2	c_1^2
$S(x_1^2)$	−2	1
$S(x_1 x_2)$	1	

	c_3	$c_1 c_2$	c_1^3
$S(x_1^3)$	3	−3	1
$S(x_1^2 x_2)$	−3	1	
$S(x_1 x_2 x_3)$	1		

	c_4	$c_3 c_1$	c_2^2	$c_2 c_1^2$	c_1^4
$S(x_1^4)$	4	4	2	−4	
$S(x_1^3 x_2)$	4	−1	−2	1	
$S(x_1^2 x_2^2)$	2	−2	1		
$S(x_1^2 x_2 x_3)$	−4	1			
$S(x_1 x_2 x_3 x_4)$	1				

	c_5	$c_4 c_1$	$c_3 c_2$	$c_3 c_1^2$	$c_2^2 c_1$	$c_2 c_1^3$	c_1^5
$S(x_1^5)$	5	−5	−5	5	5	−5	1
$S(x_1^4 x_2)$	−5	1	5	−1	−3	1	
$S(x_1^3 x_2^2)$	−5	5	−1	−2	1		
$S(x_1^3 x_2 x_3)$		5	−1	−2	1		
$S(x_1^2 x_2^2 x_3)$	5	−3	1				
$S(x_1^2 x_2 x_3 x_4)$	−5	1					
$S(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$	1						

So ist also beispielsweise aus der vorletzten Tabelle zu ersehen, daß

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + \cdots$$
$$= 4c_4 - c_3 c_1 - 2c_2^2 + c_3 c_1^2.$$

§ 123. Wir hätten die Definition der symmetrischen Funktionen enger auch so fassen können: Symmetrisch heißt eine Funktion der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wenn sie bei jeder Vertauschung je zweier der x_α ihre Form nicht ändert. Denn daraus folgt, gemäß den Lehren von der Permutation, die in Grundlehren I, S. 178 geforderte allgemeine Unveränderlichkeit der Form.

Wir wollen im Anschluß daran die Funktionen $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ untersuchen, die bei der Umstellung zweier beliebiger Elemente x_α und x_β nur das Vorzeichen ändern, den absoluten Wert aber beibehalten, also den Gleichungen

$$(18)\quad F(x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_\beta, \ldots, x_n) = -F(x_1, \ldots, x_\beta, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_n)$$

Genüge leisten. Solche Funktionen mögen alternierende heißen; die erwähnte Vertauschung der Elemente x_α und x_β untereinander heiße die Transposition von x_α und x_β und werde durch $(x_\alpha x_\beta)$ oder, was das gleiche besagt, durch $(x_\beta x_\alpha)$ dargestellt. Wir betrachten nun die folgende Funktion

$$\begin{aligned}\Delta = \prod_{\varkappa<\lambda}(x_\varkappa - x_\lambda) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \cdots (x_1 - x_n)&\\ (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \cdots (x_2 - x_n)&\\ (x_3 - x_4) \cdots (x_3 - x_n)&\\ \\ (x_{n-1} - x_n)&\end{aligned}$$

und zeigen, daß Δ bei den Vertauschungen von $x_\varkappa$ untereinander zwei Werte liefert, die sich nur durch ihre Vorzeichen voneinander unterscheiden.

Erhebt man Δ in die zweite Potenz, so zeigt sich, daß das Quadrat

$$\Delta^2 = \prod_{\varkappa<\lambda}(x_\varkappa - x_\lambda)^2$$

eine einwertige symmetrische Funktion der n Unbestimmten $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, etwa

$$= S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

wird. Daraus folgt dann umgekehrt, daß die Quadratwurzel aus $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine rationale ein- oder zweiwertige Funktion ist. Die Entscheidung fällt zugunsten der Zweiwertigkeit aus, wie die Transposition $(x_1 x_2)$ bei ihrer Anwendung auf die Form Δ darlegt.

Diese Transposition übt einen Einfluß nur auf die beiden ersten Zeilen der oben gegebenen Darstellung

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)\\ (x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)\end{aligned}$$

aus, indem sie aus ihnen

$$\begin{aligned}(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)\\ (x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)\end{aligned}$$

hervorruft. Die Vergleichung beider Formen zeigt, daß die Transposition $(x_1 x_2)$ die Funktion Δ in $-\Delta$ umwandelt. Danach ist der Satz allgemein bewiesen.

§ 124. Es gilt ferner das Theorem: Jede Transposition $(x_\alpha x_\beta)$ führt Δ in $-\Delta$ über. Wir suchen aus der Gesamtheit aller Transpositionen der Elemente $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ die heraus, die mindestens eins der beiden transponierten x_α oder x_β enthalten, und ordnen diese in folgende vier Aggregate ein, wobei der Kürze halber $(x_\alpha x_\beta)$ durch (α, β) ersetzt ist,

$$\text{(I)}\begin{cases}(1\alpha)(2\alpha)\ldots(\alpha-2,\alpha)(\alpha-1,\alpha),\\ (1\beta)(2\beta)\ldots(\alpha-2,\beta)(\alpha-1,\beta),\end{cases}\quad \text{(II)}\begin{cases}(\alpha,\alpha+1)(\alpha,\alpha+2)\ldots(\alpha,\beta-1),\\ (\alpha+1,\beta)(\alpha+2,\beta)\ldots(\beta-1,\beta),\end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad\begin{cases}(\alpha,\beta+1)(\alpha,\beta+2)\ldots(\alpha,n),\\ (\beta,\beta+1)(\beta,\beta+2)\ldots(\beta,n),\end{cases}\qquad \text{(IV)}\quad(\alpha,\beta),$$

worin $\alpha < \beta$ angenommen werden mag. Bei der Vertauschung von x_α und x_β vertauschen sich die Elemente der oberen Zeilen mit denen der unteren in (I) und ebenso in (III). Das Produkt dieser vier Zeilen ist daher der Transposition $(x_\alpha x_\beta)$ gegenüber „invariant". Betrachtet man dagegen in (II) zwei untereinander stehende Elementenpaare

$$\begin{matrix}(\alpha,\varrho)\\(\varrho,\beta)\end{matrix}\qquad(\alpha<\varrho<\beta),$$

und deren durch $(x_\alpha x_\beta)$ transformierte Klammern von der Form

$$\begin{matrix}(\beta,\varrho)\\(\varrho,\alpha)\end{matrix}\qquad(\alpha<\varrho<\beta),$$

so müssen diese sämtlich einer Zeichenänderung unterworfen werden, und zusammen $2(\beta-\alpha-1)$ Zeichenänderungen; da dies eine gerade Zahl ist, so bleibt das Produkt der Klammern in (II) ungeändert und

$$(-1)^{2(\beta-\alpha-1)} = +1.$$

Endlich bleibt noch die Wirkung von $(x_\alpha x_\beta)$ auf (α, β) zu beachten; da hier

$$(\beta - \alpha) = -(\alpha - \beta)$$

ist, so liefert sie ein Minuszeichen, und Δ wird durch $(x_\alpha x_\beta)$ in $-\Delta$ umgeändert.

Es steht somit das Resultat fest, daß Δ eine alternierende Funktion ist. Über die allgemeine Form zweiwertiger Funktionen wird noch eingehender zu sprechen sein.

Zehntes Kapitel.

Die Einheitswurzeln.

§ 125. Die n^{ten} Einheitswurzeln definieren wir als die Wurzeln der Gleichung

$$z^n - 1 = 0. \tag{1}$$

Die Moivresche Formel liefert uns ohne weiteres n verschiedene Wurzeln von (1), nämlich

$$z_\varkappa = \cos\frac{2\varkappa\pi}{n} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n), \tag{2}$$

und wir könnten, auf diese Darstellung gestützt, die Theorie der Einheitswurzeln herleiten. Bei einer solchen Behandlung würden wir aber das Gebiet der reinen Algebra verlassen; und um dies zu vermeiden, wollen wir von der Benutzung der goniometrischen Formel (2) absehen.

Wir brauchen für unseren Zweck den Satz, daß die Gleichung (1) n Wurzeln besitzt; der ist im achten Kapitel bewiesen worden.

Nun sei ω eine Wurzel von (1), dann ist auch jede Potenz ω^λ von ω mit ganzzahligem Exponenten λ eine n^{te} Einheitswurzel; denn man hat ja

$$(\omega^\lambda)^n = (\omega^n)^\lambda = 1.$$

Da eine Potenz von ω, nämlich die n^{te}, gleich 1 wird, so gibt es auch eine niedrigste, etwa die k^{te}, für die das eintritt. In der Reihe der Potenzen

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{k-1}, \omega^k \tag{3}$$

haben dann alle Glieder untereinander verschiedene Werte; denn hätte man $\omega^\alpha = \omega^\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k;\ \alpha < \beta)$, so würde $\omega^{\beta-\alpha} = 1$ folgen mit einem Exponenten $(\beta - \alpha) < k$, was gegen die Annahme verstieße.

Bildet man die Reihen

$$\begin{array}{lllll} \omega\ , & \omega^2\ , & \ldots, & \omega^{k-1}, & \omega^k, \\ \omega^{k+1}, & \omega^{k+2}, & \ldots, & \omega^{2k-1}, & \omega^{2k}, \\ \omega^{2k+1}, & \omega^{2k+2}, & \ldots, & \omega^{3k-1}, & \omega^{3k}, \end{array}$$

so sind die Werte der Glieder jeder einzelnen Spalte einander gleich und die Werte der Glieder von Spalte zu Spalte verschieden; insbesondere haben die Glieder der letzten Spalte und nur sie den Wert 1. Da nun $\omega^n = 1$ ist, so steht ω^n in der letzten Spalte, d. h. n ist ein Vielfaches von k, und k ein Teiler von n.

Wenn k der niedrigste Exponent ist, der ω^k zu Eins macht, dann sagen wir: ω gehört zum Exponenten k; damit eine n^{te} Einheitswurzel ω zum Exponenten k gehöre, ist es notwendig, daß k ein Teiler von n sei; gehört ω zum Exponenten n, so heißt ω eine primitive n^{te} Einheitswurzel. Gehört ω zum Exponenten k, so liefern die Potenzen von ω gerade k verschiedene k^{te} Einheitswurzeln; ist ω eine primitive n^{te} Einheitswurzel, so liefern die Potenzen von ω alle n^{ten} Einheitswurzeln. Nach diesem letzten Resultate reicht also die Kenntnis einer einzigen primitiven n^{ten} Einheitswurzel zur vollständigen Auflösung der Gleichung (1) aus. Lassen wir die goniometrische Wurzeldarstellung gelten, so weist sich $k = 1$ in (2) als primitive n^{te} Einheitswurzel aus; bei rein algebraischer Behandlung bedarf man zum Existenznachweise einer solchen noch weiterer Schlüsse.

§ 126. Wir wollen dazu, vorbereitend, auf zweierlei aufmerksam machen. Zunächst können wir auch Potenzen der Einheitswurzeln mit negativen Exponenten einführen, indem wir

$$\omega^{-1} = \omega^{n-1},\ \omega^{-2} = \omega^{n-2},\ \omega^{-3} = \omega^{n-3},\ \ldots,\ \omega^{-n} = 1,$$
$$\omega^{-n-1} = \omega^{-1},\ \omega^{-n-2} = \omega^{-2},\ \ldots$$

setzen. — Ferner lassen sich, wie aus der Theorie der Kettenbrüche oder aus dem Euklidschen Algorithmus für den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzen Zahlen folgt, zu zwei einander teilerfremden Zahlen m und n zwei andere a und b bestimmen, für die

$$am + bn = 1 \quad \text{sobald} \quad |a| < |n|,\ |b| < |m|$$

wird.

Es seien nun die beiden Gleichungen vorgelegt

$$x^m - 1 = 0,\quad x^n - 1 = 0,$$

in denen die Exponenten m und n teilerfremd sind; ω sei eine m^{te}

und ϖ eine n^{te} Einheitswurzel. Dann ist die Gleichung $\omega = \varpi$ nur dann möglich, wenn beide Seiten $= 1$ werden. Denn aus

$$\omega = \varpi \quad \text{folgt} \quad \varpi^{bn} = \omega^{1-am}, \quad \text{d. h.} \quad \omega = 1, \quad \text{also auch} \quad \varpi = 1.$$

Daraus ergibt sich, daß $\omega \cdot \varpi = 1$ nur eintritt, wenn $\omega = \varpi = 1$ ist. Multipliziert man eine m^{te} Einheitswurzel ω mit einer n^{ten} Einheitswurzel ϖ, so ist das Produkt $\omega \cdot \varpi$ eine $(m \cdot n)^{\text{te}}$ Einheitswurzel; denn es ist

$$(\omega\varpi)^{mn} = (\omega^m)^n (\varpi^n)^m = 1.$$

I. Durchläuft ω alle Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ von $x^m - 1 = 0$ und ϖ alle Wurzeln $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ von $x^n - 1 = 0$, so durchläuft $\omega \cdot \varpi$ alle $(m \cdot n)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln. Denn alle Produkte $\omega_\alpha \varpi_\beta$ sind untereinander verschieden, weil aus

$$\omega_\alpha \varpi_\beta = \omega_\gamma \varpi_\delta \quad \text{folgen würde} \quad \omega_\gamma^{-1} \omega_\alpha = \varpi_\delta \varpi_\beta^{-1} = 1,$$

und daraus $\omega_\alpha = \omega_\gamma$, $\varpi_\beta = \varpi_\delta$. Und ferner stimmt die Anzahl der Produkte $\omega_\alpha \varpi_\beta$ mit der Anzahl der $(m \cdot n)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln überein.

Ist ω eine primitive m^{te} und ϖ eine primitive n^{te} Einheitswurzel, so ist $(\omega \cdot \varpi)$ eine primitive $(m \cdot n)^{\text{te}}$. Denn gehört $(\omega \cdot \varpi)$ zum Exponenten ϱ, d. h. ist ϱ der niedrigste Exponent, für den

$$(\omega \cdot \varpi)^\varrho = 1$$

ist, so folgt

$$\omega^\varrho \cdot \varpi^\varrho = 1 \quad \text{und} \quad \omega^\varrho = 1, \ \varpi^\varrho = 1;$$

also muß ϱ ein Vielfaches von m und von n sein. Da m und n teilerfremd sind, wird ϱ ein Vielfaches von $m \cdot n$; und da ϱ so klein wie möglich ist, so bleibt $\varrho = m \cdot n$, d. h. $(\omega \cdot \varpi)$ ist eine primitive $(m \cdot n)^{\text{te}}$ Einheitswurzel.

Ist nicht gleichzeitig ω eine primitive m^{te}, und ϖ eine primitive n^{te} Einheitswurzel, dann ist $(\omega\varpi)$ keine primitive $(m \cdot n)^{\text{te}}$. Denn gehört z. B. ω zum Exponenten μ, wo μ ein Teiler von m ist, so wird

$$(\omega \cdot \varpi)^{\mu n} = (\omega^\mu)^n (\varpi^n)^\mu = 1,$$

so daß $(\omega\varpi)$ zu μn oder einem Teiler von μn als Exponent gehört.

II. Durchläuft ω alle primitiven Wurzeln von $x^m - 1 = 0$ und ϖ alle von $x^n - 1 = 0$, so durchläuft $\omega\varpi$ alle primitiven Wurzeln von $x^{m \cdot n} - 1 = 0$. Das folgt aus den letzten Resultaten.

§ 127. Durch den Satz I des vorigen Paragraphen ist die Berechnung der Wurzeln von

$$x^{m \cdot n} - 1 = 0 \qquad (m, n \text{ sind teilerfremd}) \tag{4}$$

auf die der Wurzeln der beiden Gleichungen

$$x^m - 1 = 0, \quad x^n - 1 = 0 \tag{5}$$

reduziert; und durch den Satz II die der primitiven Wurzeln von (4) auf die der primitiven Wurzeln der beiden Gleichungen (5). Wenn wir die Anzahl der primitiven k^{ten} Einheitswurzeln durch $\varphi(k)$ bezeichnen, dann folgt aus dem Satze II

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \quad (m, n \text{ sind teilerfremd}). \tag{6}$$

Ist nun k in seine Primfaktorpotenzen zerlegt,

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

wo die $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die untereinander verschiedenen Primzahlen bedeuten, die in k als Faktoren vorkommen, so liefert (6), mehrfach angewendet,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(k) &= \varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\ldots p_r^{\alpha_r}) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})\varphi(p_3^{\alpha_3}\ldots p_r^{\alpha_r}) \\ &= \prod_{\lambda=1}^{r} \varphi(p_\lambda^{\alpha_\lambda}), \end{aligned}\right. \tag{7}$$

so daß also die Berechnung von $\varphi(k)$ auf die einfachere Berechnung zurückgeführt wird, in der k eine Primzahlpotenz ist. Wir bestimmen demnach die Anzahl der primitiven Wurzeln von

$$x^{p^\alpha} - 1 = 0. \tag{8}$$

Jede nicht primitive Wurzel dieser Gleichung ist eine Wurzel der Gleichung

$$x^{p^{\alpha-1}} - 1 = 0,$$

und umgekehrt; (8) hat somit $p^{\alpha-1}$ nicht-primitive Wurzeln, und da (8) im ganzen p^α Wurzeln besitzt, so bleiben nur

$$p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

primitive Wurzeln übrig. Demnach geht (7) über in

$$\varphi(k) = \prod_{\lambda=1}^{r} p_\lambda^{\alpha_\lambda}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = k\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \tag{9}$$

So wird für

$$k = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12, \ldots$$

$$\varphi(k) = 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 2,\ 6,\ 4,\ 6,\ \ 4,\ 10,\ \ 4, \ldots.$$

§ 128. Es sei nun ω eine primitive k^{te} Einheitswurzel, dann liefert

$$\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \ldots,\ \omega^{k-1},\ \omega^k = 1 \tag{10}$$

sämtliche Wurzeln von $x^k - 1 = 0$. Wir fragen, zu welchem Expo-

nenten eine Potenz ω^h gehört. Ist das der Exponent ϱ, so ist ϱ dadurch charakterisiert, daß ϱh das niedrigste Vielfache von h wird, das durch k teilbar ist. Bezeichnen wir mit $[k, h]$ den größten gemeinsamen Teiler von k und h und definieren k_1 und h_1 durch die Gleichungen

$$k = k_1 \cdot [k, h], \quad h = h_1 \cdot [k, h],$$

so haben h_1 und k_1 keinen gemeinsamen Teiler mehr, und ϱ ist dadurch charakterisiert, daß $\varrho \cdot h_1$ das niedrigste Vielfache von h_1 wird, das durch k_1 teilbar ist. Offenbar ergibt sich $\varrho = k_1$.

III. Die Potenz ω^h gehört zum Exponenten $k_1 = [h, k]$. Ist h teilerfremd zu k, so ist ω^h eine primitive k^{te} Einheitswurzel, und nur dann.

Vergleicht man dies letzte Resultat mit dem des vorigen Paragraphen, so erkennt man: IV. $\varphi(k)$ gibt die Anzahl der Zahlen h an, die kleiner als k und zu k teilerfremd sind.

§ 129. Ist k gleich einer Primzahl p, so hat $x^p - 1 = 0$ nur eine nicht primitive Wurzel $x = 1$, und die $(p-1)$ primitiven übrigen Wurzeln genügen der Gleichung

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} \equiv x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \cdots + x + 1 = 0.$$

Ist k gleich einer Primzahlpotenz p^α, so genügen alle nicht primitiven $(p^\alpha)^{\text{ten}}$ Wurzeln der Gleichung $x^{p^{\alpha-1}} - 1 = 0$, also die primitiven der Gleichung

$$(11) \qquad \frac{x^{p^\alpha} - 1}{x^{p^{\alpha-1}} - 1} \equiv x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + x^{p^{\alpha-1}(p-2)} + \cdots + x^{p^{\alpha-1}} + 1 = 0.$$

Wir suchen nun allgemein die Gleichung

$$g_k(x) = 0$$

zu bestimmen, deren Wurzeln die k^{ten} primitiven Einheitswurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(m)}$ sind, so daß also $g_k(x)$ vom Grade $\varphi(k)$ ist. Wir nehmen g_k als bekannt an und suchen für den allgemeinen Index kp^α die Lösung der Gleichung

$$\varphi_{kp^\alpha}(x) = 0,$$

wo p teilerfremd zu k sein soll. Aus

$$g_k(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{\varphi(m)})$$

folgt

$$g_k(x^{p^\alpha}) = (x^{p^\alpha} - x_1)(x^{p^\alpha} - x_2) \ldots (x^{p^\alpha} - x_{\varphi(m)}),$$

woraus man ersieht, daß jede Gleichung

$$x^{p^\alpha} - x_1 = 0, \quad x^{p^\alpha} - x_2 = 0, \quad \ldots$$

p^α Einheitswurzeln der Ordnung (kp^α) liefert. Von diesen sind die nicht-primitiv, bei denen schon die $(p^{\alpha-1})^{\text{te}}$ Potenz bzw. gleich x_1, $x_2, \ldots$ wird, die also die Gleichung

$$g_k\left(x^{p^{\alpha-1}}\right) = 0$$

befriedigen. Demnach führt der Quotient

$$\frac{g_k\left(x^{p^\alpha}\right)}{g_k\left(x^{p^{\alpha-1}}\right)}$$

gleich Null gesetzt auf die Gleichung für die primitiven $(pk^\alpha)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln, d. h. man hat

$$g_{kp^\alpha}(x) = \frac{g_k\left(x^{p^\alpha}\right)}{g_k\left(x^{p^{\alpha-1}}\right)} \qquad (p, k \text{ sind teilerfremd}). \tag{12}$$

Setzen wir nun des bequemeren Druckes wegen für den Augenblick

$$x^q - 1 = [q],$$

so liefert (11)

$$g_{p_1^\alpha}(x) = \frac{[p_1^\alpha]}{[p_1^{\alpha-1}]},$$

und dann (12)

$$g_{p_1^\alpha p_2^\beta}(x) = \frac{[p_1^\alpha p_2^\beta] \cdot [p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1}]}{[p_1^{\alpha-1} p_2^\beta] \cdot [p_1^\alpha p_2^{\beta-1}]},$$

$$g_{p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma}(x) = \frac{[p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma] \cdot [p_1^\alpha p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1}] \cdot [p_1^{\alpha-1} p_2^\beta p_3^{\gamma-1}] \cdot [p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} p_3^\gamma]}{[p_1^{\alpha-1} p_2^\beta p_3^\gamma] \cdot [p_1^\alpha p_2^{\beta-1} p_3^\gamma] \cdot [p_1^\alpha p_2^\beta p_3^{\gamma-1}] \cdot [p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1}]}$$

usf.

Bezeichnet man mit q_0 die Zahl

$$k = p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \ldots p_r^\varepsilon$$

sowie alle Zahlen, die aus k durch Division mit einer geraden Anzahl von Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ entstehen, und mit q_1 alle, die aus k durch Division mit einer ungeraden Anzahl entstehen, so wird

$$g_k(x) = \frac{\Pi[q_0]}{\Pi[q_1]}. \tag{13}$$

§ 130. Nachdem wir so die Gleichung hergeleitet haben, deren Wurzeln die primitiven k^{ten} Einheitswurzeln sind, wollen wir die Irreduktibilität dieser Gleichung im Körper der rationalen Zahlen nachweisen. Sehr einfach gelingt das im Falle $k = p$ auf einem von Eisenstein gefundenem Wege.

Es ist

$$g_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1};$$

setzt man hierin $x = z + 1$, so entsteht die in z ganze Funktion $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\frac{(z+1)^p - 1}{z} = z^{p-1} + \frac{p}{1} z^{p-2} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} z^{p-3}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{p-4} + \cdots + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} z + p.$$

Auf die rechts stehende Funktion läßt sich der Satz aus § 49, S. 59, anwenden, und da $g_p(x)$ und $g_p(z+1)$ gleichzeitig reduktibel und irreduktibel sind, so ist der Satz bewiesen.

Für $k = p^\alpha$ ist der Beweis dem für $k = p$ gegebenen ganz ähnlich. Wir übergehen ihn und behandeln sofort den allgemeinen Fall für ein beliebiges k. Dazu brauchen wir einige Hilfssätze.

§ 131. Ist

$$f(x) \equiv x^r - a x^{r-1} + b x^{r-2} - \cdots \pm d = 0$$

eine ganzzahlige Gleichung mit den Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$ und

$$F(x) \equiv x^r - A x^{r-2} + B x^{r-1} - \cdots \pm D = 0$$

die Gleichung mit den Wurzeln $x_1^q, x_2^q, x_3^q, \ldots, x_r^q$, wobei q eine beliebige Primzahl bedeutet, so ist fürs erste zu zeigen, daß

$$F(x) \equiv f(x) \pmod{q}. \tag{14}$$

Um dies zu beweisen, denken wir uns unter $u, v, \ldots, w$ unbestimmte Größen und finden durch Verwendung des polynomischen Satzes

$$(u + v + \cdots + w)^q = u^q + v^q + \cdots + w^q + q \cdot s(u, v, \ldots, w).$$

Hierin stellt $s(u, v, \ldots, w)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von $u, v, \ldots, w$ dar, die zudem symmetrisch ist, da die linke Seite sowie $u^q + v^q + \cdots + w^q$ auf der rechten in den Unbestimmten symmetrische Form hat.

Hierin setzen wir $u = x_1$, $v = x_2, \ldots, w = x_r$; dann wird die linke Seite zu a^q, der erste Teil der rechten zu A, und $s(u, v, \ldots, w)$ geht in eine ganze ganzzahlige Funktion $s_1(a, b, c, \ldots, d)$ über; wenden wir auf a^q den „kleinen“ Fermatschen Satz an, so folgt

$$A \equiv a \pmod{q}.$$

Setzen wir in die obige Gleichung für die $u, v, \ldots, w$ die $\frac{1}{2} r(r-1)$ Produkte $x_\alpha x_\beta$ ein, dann wird die linke Seite zu b^q, der erste Teil der rechten zu B, und s geht in eine ganze ganzzahlige Funktion

$s_0(a, b, c, \ldots, d)$ über; wenden wir auf b^q wieder den erwähnten Fermatschen Satz an, so folgt

$$B \equiv b \pmod q$$

usw. Also gilt (14).

An zweiter Stelle beweisen wir, daß, wenn $f(x)$ irreduktibel ist, und wenn $x_1^q, x_2^q, \ldots, x_r^q$ untereinander verschieden sind, auch $F(x)$ irreduktibel sein wird. In der Tat, $F(x)$ habe zum irreduktiblen Teiler mit der Wurzel x_1^q die Funktion $F_1(x)$; dann hat $F_1(x^q) = 0$ die Wurzel x_1 mit $f(x) = 0$ gemein, also wegen der Irreduktibilität von $f(x) = 0$ alle r Größen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ zu Wurzeln; d. h. es ist

$$F_1(x_1^q) = 0, \; F_1(x_2^q) = 0, \; F_1(x_3^q) = 0, \; \ldots, \; F_1(x_r^q) = 0.$$

$F_1(x) = 0$ hat also alle Wurzeln mit $F(x) = 0$ gemein; sind $x_1^q, x_2^q, \ldots, x_r^q$ voneinander verschieden, dann ist der Grad von F_1 mindestens gleich dem von F; daher F irreduktibel.

Zusätzlich möge noch bemerkt werden, daß, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_r$ zu den k^{ten} Einheitswurzeln gehören, und k zu q teilerfremd ist, die Bedingungen $x_\alpha^q \neq x_\beta^q$ von selbst erfüllt sind. Denn wäre $x_\alpha^q = x_\beta^q$, dann bestimmen wir eine Zahl q' durch die Forderung $qq' \equiv 1 \pmod k$ und finden $x_\alpha^{qq'} = x_\beta^{qq'}$, d. h. $x_\alpha \equiv x_\beta$. Die Gleichheit zweier Wurzeln x_α, x_β widerstreitet aber der Forderung der Irreduktibilität von $f(x)$.

§ 132. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zum Beweise des Satzes über, daß die Gleichung $g_n(x) = 0$ vom Grade $\varphi(n)$, deren Wurzeln die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln sind, irreduktibel wird. Wir nehmen an, $h(x)$ sei ein irreduktibler Faktor von $g_n(x)$ und ω eine der Wurzeln von $h(x) = 0$; kann man nun nachweisen, daß $h(x) = 0$ durch sämtliche Wurzeln von $g_n(x) = 0$ befriedigt wird, dann ist die Irreduktibilität von g_n sichergestellt. Sämtliche Wurzeln von $g_n(x) = 0$ können in die Form $\omega^\varkappa$ treten, wo $\varkappa$ eine zu n teilerfremde Zahl bedeutet. Es wäre somit zu zeigen, daß für jedes solche $\varkappa$ die Gleichung $h(\omega^\varkappa) = 0$ erfüllt wird. Dabei genügt es, sich auf Primzahlen $\varkappa$ zu beschränken. Denn sind $\varkappa$ und λ zwei zu n teilerfremde Primzahlen, die auch einander gleich sein dürfen, und ist $h(\omega^\varkappa) = 0$ und auch $h(\omega^\lambda) = 0$, so hat $h(x^\lambda) = 0$ mit der irreduktiblen Gleichung $h(x) = 0$ eine Wurzel $x = \omega$ gemeinsam, also alle und insbesondere $x = \omega^\varkappa$; d. h. es wird $h(\omega^{\varkappa\lambda}) = 0$. Ist dann μ eine weitere zu n teilerfremde Primzahl und $h(\omega^\mu) = 0$, so hat $h(x^\mu) = 0$ mit der irreduktiblen Gleichung $h(x) = 0$ eine Wurzel $x = \omega$ gemeinsam, also alle, und insbesondere die Wurzel $x = \omega^{\varkappa\lambda}$; d. h. es wird $h(\omega^{\varkappa\lambda\mu}) = 0$ usf.

Bedeutet daher q eine willkürliche zu n teilerfremde Primzahl, so ist nachzuweisen, daß $h(\omega^q) = 0$ wird. Dieser Aufgabe können wir eine andere Fassung in folgender neuen Gestalt geben.

Wir bilden die Gleichung $H(x) = 0$, deren Wurzeln die q^{ten} Potenzen der Wurzeln von $h(x) = 0$ sind. $H(x)$ ist mit $h(x)$ zugleich irreduktibel, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen gezeigt wurde. Ist also $h(\omega^q) = 0$, dann haben $h = 0$ und $H = 0$ eine Wurzel $x = \omega^q$ gemeinsam, und es wird $H(x) = h(x)$. Der Nachweis der Irreduktibilität von $g_n(x)$ ist daher erbracht, wenn feststeht, daß $H(x)$ nicht von $h(x)$ verschieden ist.

Wären $H(x)$ und $h(x)$ voneinander verschieden, so hätten beide Funktionen wegen ihrer Irreduktibilität keinen Faktor gemeinsam, und da beide Funktionen Teiler von $x^n - 1$ sind, so hätten wir

$$x^n - 1 = h(x)H(x)\varphi(x),$$

was mit Hilfe von (14) übergeht in

$$\begin{aligned} x^n - 1 &\equiv h(x)^2\varphi(x) \pmod q \\ &\equiv h(x)^2\varphi(x) + q \cdot \psi(x), \end{aligned}$$

wo $\psi(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von x ist. Nimmt man auf beiden Seiten der letzten Gleichung die ersten Ableitungen und geht von der Gleichung auf die Kongruenz modulo q über, so entsteht

$$nx^{n-1} \equiv h(x)\mathrm{X}(x) \pmod q;$$

auch $\mathrm{X}(x)$ ist hier eine ganze ganzzahlige Funktion von x. Aus den beiden letzten Kongruenzen folgt

$$\left.\begin{aligned} x(nx^{n-1}) - n(x^n - 1) &\equiv h(x)x\mathrm{X}(x) - nh(x)^2\varphi(x) \\ &\equiv h(x)\Psi(x) \end{aligned}\right\} \pmod q.$$

Da nun q zu n teilerfremd ist, so können nicht alle Koeffizienten von $\Psi(x)$ und nicht alle von $h(x)$ durch q teilbar sein, und man sieht leicht, daß $\Psi(x)$ und $h(x)$ modulo q kongruent zu zwei Konstanten sein müssen. Das widerstreitet aber der Annahme, daß $h(x)$ als Teiler von $(x^n - 1)$ mit einem höchsten Gliede von der Form $1 \cdot x^{\varphi(n)}$ beginnt.

$H(x)$ kann demnach nicht von $h(x)$ verschieden sein, und $g_n(x)$ ist irreduktibel.

Elftes Kapitel.

Die Kreisteilungsgleichungen.

§ 133. Die Gleichung, welche die $\varphi(n)$ Einheitswurzeln n^{ter} Ordnung zu Wurzeln hat, heißt die Kreisteilungsgleichung n^{ter} Ordnung. Diese Benennung wird durch das Folgende erklärt und ge-

rechtfertigt. Wir setzen $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \left[\begin{smallmatrix} c & 2\pi \\ s & n \end{smallmatrix}\right]$ und stellen die n Größen

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3 \qquad \omega^{n-1}\ \omega^n$$

durch Punkte

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_{n-1},\ P_0$$

der Gaußschen Zahlenebene dar. Wählen wir für die P_α als Polarkoordinaten ϱ_α, ϑ_α, so wird

$$\varrho_\alpha = 1,\quad \vartheta_\alpha = \frac{2\alpha\pi}{n}$$

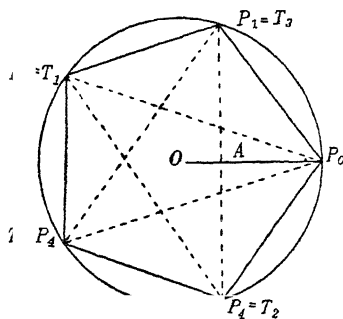
woraus man ersieht, daß alle n Punkte P_α auf einem mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt O geschlagenen Kreise liegen, derart, daß jeder Zentriwinkel

$$P_\alpha O P_{\alpha+1} = \frac{2(\alpha+1)\pi}{n} - \frac{2\alpha\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

wird. Demnach bilden die Punkte P_α die Ecken des in den Einheitskreis einbeschriebenen regulären n-Ecks, bei dem die eine Ecke $P_0 = \cos 0 + i\sin 0$ in die Richtung der reellen positiven Achse fällt.

Bei dieser Konstruktion ist es wesentlich, daß ω als primitive n^{te} Einheitswurzel angenommen wird, dagegen unwesentlich, welche von den $\varphi(n)$ vorhandenen gewählt wird; die Punkte P_α treten sämtlich bei jeder primitiven n^{ten} Einheitswurzel auf, wenngleich in geänderter Reihenfolge. Versteht man unter ϖ eine andere, eine von ω^{+1} und ω^{-1} verschiedene primitive Einheitswurzel und bestimmt die Punkte des Einheitskreises

Fig. 8.

$$P_1' = \varpi,\quad P_2' = \varpi^2,$$
$$P_3' = \varpi^3,\ \ldots,\ P_{n-1}' = \varpi^{n-1},$$
$$P_0' = 1,$$

so ist auch das n-Eck $P_0'P_1'P_2'\ldots P_{n-1}'$ regulär, aber seine Seiten schneiden sich; es ist ein überschlagenes Vieleck, dessen Ecken, abgesehen von ihrer Anordnung, mit denen des n-Ecks $P_0P_1P_2\ldots P_{n-1}$ zusammenfallen. (Die Figur bezieht sich auf die Annahmen $n = 5$; $\varpi = \omega^2$.)

Aus dem Besprochenen ergibt sich, daß mit der Bestimmung von ω die Ecken des regulären n-Ecks bestimmt sind. Ja, da der Bruch

$$\frac{\omega + \omega^{-1}}{2} = \cos\frac{2\pi}{n} = OA$$

ist, so reicht es für die Kenntnis der n-Eckseite P_0P_1 aus, den Wert von $\omega + \omega^{-1}$ zu wissen.

Hätte man für ϖ eine nicht primitive Wurzel ω^k genommen, die etwa zum Exponenten n_0 gehört, so würde die Konstruktion der Punkte $P_1', P_2', \ldots$ auf ein n_0-Eck geführt haben, statt auf ein n-Eck; dabei ist n_0 ein Teiler von n.

Wir können die Aufgabe der Bestimmung eines regulären n-Ecks in einfachere zerlegen, sobald n verschiedene Primfaktoren enthält, und als ein Produkt zweier teilerfremden Zahlen $n = s \cdot t$ dargestellt werden kann. Denn nach der Theorie der Kettenbrüche lassen sich auf unendlich verschiedene Arten zwei ganze Zahlen σ und τ bestimmen, die der Gleichung

$$\sigma t - \tau s = 1,$$

also auch den Gleichungen

$$\frac{\sigma}{s} - \frac{\tau}{t} = \frac{1}{n}, \quad \frac{2\sigma\pi}{s} - \frac{2\tau\pi}{t} = \frac{2\pi}{n}$$

genügen. Daraus sieht man, daß der Zentriwinkel, der zur Seite eines regulären n-Ecks gehört, gefunden wird, wenn man von dem σ-fachen des zum regulären s-Eck gehörigen das τ-fache des zum regulären t-Eck gehörigen Zentriwinkels abzieht. Ist

$$n = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdots,$$

wo $p, q, r, \ldots$ die untereinander verschiedenen Primfaktoren von n bedeuten, so reduziert sich nach dem soeben Angegebenen die Herstellung eines regulären n-Ecks auf die eines regulären p^α-, eines regulären q^β-, ...-Ecks usf.

§ **134.** Wir haben im vorigen Paragraphen die geometrisch interessante Frage nach der Konstruktion des regulären n-Ecks unter alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal noch nicht berührt. Das soll jetzt geschehen. Man weiß, daß die Konstruktion der Wurzeln von linearen und von quadratischen Gleichungen auf diese Weise stets durchgeführt werden kann, und daß umgekehrt, wenn eine Strecke mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal darstellbar ist, ihre Größe einem Rationalitätsbereiche angehört, der durch Adjungierung einer endlichen Anzahl von Quadratwurzeln aus dem ursprünglichen Bereiche hergeleitet werden kann, dem die gegebenen Daten entnommen sind.

Dies wenden wir auf die Konstruktion der regulären Vielecke an und erkennen: N u r d a n n u n d s t e t s d a n n, w e n n d i e L ö s u n g d e r K r e i s t e i l u n g f ü r d i e n^{ten} E i n h e i t s w u r z e l n d u r c h d i e L ö s u n g e i n e r K e t t e q u a d r a t i s c h e r G l e i c h u n g e n m ö g l i c h i s t, l ä ß t s i c h d i e K o n s t r u k t i o n d e s r e g u l ä r e n n-E c k s a l l e i n d u r c h Z i r k e l u n d L i n e a l b e w e r k s t e l l i g e n.

Nach dem vorigen Paragraphen reicht es aus, die Zahl n durch die Potenz p^α einer Primzahl zu ersetzen.

§ 135. Wir gehen nun zu der Lösung der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{x^p-1}{x-1} \equiv x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$$

über, unter der Annahme, daß p eine Primzahl sei. Um von vornherein die Ziele unserer theoretischen Untersuchungen kenntlich zu machen, wollen wir zwei Beispiele behandeln, $p = 17$ und $p = 19$.

I. Wir verstehen zunächst unter ω eine primitive 17te Einheitswurzel, etwa $\cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$; dann sind sämtliche Wurzeln von

$$x^{16} + x^{15} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$$

gegeben durch die Reihe der Potenzen

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^{14},\ \omega^{15},\ \omega^{16}.$$

Aus ihnen bilden wir zwei Summen solcher Potenzen von ω

$$(2) \qquad \begin{cases} \eta_0 = \omega^1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^8 + \omega^{16} + \omega^{15} + \omega^{13} + \omega^9, \\ \eta_1 = \omega^3 + \omega^6 + \omega^{12} + \omega^7 + \omega^{14} + \omega^{11} + \omega^5 + \omega^{10}, \end{cases}$$

die so beschaffen sind, daß jedes Glied das Quadrat des vorhergehenden, und daß das erste Glied das Quadrat des letzten ist (unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $\omega^{17} = 1$ wird). Wir berechnen die Koeffizienten der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln η_0 und η_1 sind, und finden zunächst

$$\eta_0 + \eta_1 = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{16} = -1;$$

multiplizieren wir ferner die einzelnen Summanden von η_0 mit den einzelnen von η_1, so ergibt sich

$$\eta_0 \cdot \eta_1 = 4(\eta_0 + \eta_1) = -4,$$

und die gesuchte Gleichung wird

$$(\eta - \eta_0)(\eta - \eta_1) = \eta^2 + \eta - 4 = 0.$$

Daraus folgt für die Wurzeln η_0 und η_1 der Wert

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2};$$

es ist nur noch zweifelhaft, wie die Werte η_0 und η_1 sich den Wurzeln $\pm\sqrt{17}$ zuordnen. Das erledigt sich so: es ist

$$\omega + \omega^{16} = 2\cos\frac{2\pi}{17}, \quad \omega^2 + \omega^{15} = 2\cos\frac{4\pi}{17}, \quad \omega^4 + \omega^{13} = 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

$$\omega^8 + \omega^9 = -2\cos\frac{\pi}{17};$$

$$\omega^3 + \omega^{14} = 2\cos\frac{6\pi}{17}, \quad \omega^5 + \omega^{12} = -2\cos\frac{7\pi}{17}, \quad \omega^6 + \omega^{11} = -2\cos\frac{5\pi}{17},$$

$$\omega^7 + \omega^{10} = -2\cos\frac{3\pi}{17};$$

und daraus erkennt man, daß η_1 eine reelle, wesentlich negative Größe ist; denn es ist ja

$$\eta_1 = -2\left(\cos\frac{3\pi}{17} - \cos\frac{6\pi}{17}\right) - 2\left(\cos\frac{5\pi}{17} + \cos\frac{7\pi}{17}\right),$$

und es wird

$$\eta_0 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}. \tag{3}$$

Wir bilden nun weiter aus den Potenzen der ω die vier Summen

$$\begin{cases} \eta_0' = \omega + \omega^4 + \omega^{16} + \omega^{13}, & \eta_1' = \omega^3 + \omega^{12} + \omega^{14} + \omega^5, \\ \eta_2' = \omega^2 + \omega^8 + \omega^{15} + \omega^9, & \eta_3' = \omega^6 + \omega^7 + \omega^{11} + \omega^{10}, \end{cases} \tag{4}$$

die so beschaffen sind, daß jedes Glied die vierte Potenz des vorhergehenden, und daß das erste Glied die vierte Potenz des letzten ist. Wir berechnen hier wieder die Koeffizienten der quadratischen Gleichung mit den Wurzeln η_0' und η_2' und der mit den Wurzeln η_1' und η_3' und finden zunächst

$$\eta_0' + \eta_2' = \eta_0, \quad \eta_1' + \eta_3' = \eta_1;$$

weiter durch Multiplikation der zusammengehörigen η'

$$\eta_0' \cdot \eta_2' = -1, \quad \eta_1' \cdot \eta_3' = -1,$$

und daraus

$$\begin{cases} (\eta - \eta_0')(\eta - \eta_2') = \eta^2 - \eta_0\eta - 1 = 0, \\ (\eta - \eta_1')(\eta - \eta_3') = \eta^2 - \eta_1\eta - 1 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

also

$$\eta = \frac{\eta_0}{2} \pm \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} + 1}, \quad \eta = \frac{\eta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1}.$$

Um die richtige Verteilung der Vorzeichen zu erlangen, betrachten wir die oben angegebenen Werte der $\omega^\alpha + \omega^{-\alpha}$ aus (4) und erkennen, daß η_0' und η_1' positive Werte haben. Also wird

$$\begin{aligned} \eta_0' &= \frac{\eta_0}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} + 1}, \quad \eta_1' = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1}, \\ \eta_2' &= \frac{\eta_0}{2} - \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} + 1}, \quad \eta_3' = \frac{\eta_1}{2} - \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1}. \end{aligned} \tag{5a}$$

Endlich zerlegen wir η_0' in die Summe der beiden Teilsummen

$$\eta_0'' = \omega + \omega^{16} \quad \text{und} \quad \eta_2'' = \omega^4 + \omega^{13}.$$

Daraus ergibt sich

$$\eta_0'' + \eta_2'' = \eta_0', \quad \text{und} \quad \eta_0'' \cdot \eta_2'' = \eta_1'$$

und daher

$$(\eta - \eta_0'')(\eta - \eta_2'') = \eta^2 - \eta_0'\eta + \eta_1', \tag{6}$$

also

$$\eta = \frac{\eta_0'}{2} \pm \sqrt{\frac{\eta_0'^2}{4} - \eta_1'},$$

und, da $\eta_0'' > \eta_2''$ ist,

$$\eta_0'' = \frac{\eta_0'}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0'^2}{4} - \eta_1'}, \quad \eta_2'' = \frac{\eta_0'}{2} - \sqrt{\frac{\eta_0'^2}{4} - \eta_1'}.$$

Ein letzter Schritt führt uns zur endgültigen Lösung der Gleichung 16^ten^ Grades (1). Da nämlich

$$\omega + \omega^{16} = \eta_0'' \quad \text{und} \quad \omega \cdot \omega^{16} \cdot$$

ist, so liefert die Gleichung zweiten Grades

$$\eta^2 - \eta_0'' \cdot \eta + 1 = 0 \tag{7}$$

als Wurzeln

$$\frac{\eta_0''}{2} \pm \sqrt{\frac{\eta_0''^2}{4} - 1}$$

die beiden Größen ω und ω^{16}; und da die imaginäre Koordinate von $\omega = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$ positiv, dagegen die von $\omega^{16} = \cos\frac{32\pi}{17} + i\sin\frac{32\pi}{17}$ negativ ist, so ergibt sich als Schlußresultat

$$\omega = \frac{\eta_0''}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0''^2}{4} - 1}, \quad \omega^{16} = \frac{\eta_0''}{2} - \sqrt{\frac{\eta_0''^2}{4} - 1}. \tag{8}$$

Um die für die Konstruktion des regulären Siebzehnecks ausreichende Summe $\omega + \omega^{-1}$ zu finden, ist die folgende Kette von Wurzeln quadratischer Gleichungen zu bilden

$$2\eta_0 = \sqrt{17} - 1, \qquad -2\eta_1 = \sqrt{17} + 1,$$

$$2\eta_0' = \eta_0 + \sqrt{\eta_0^2 + 4}, \qquad 2\eta_1' = \eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + 4},$$

$$2\eta_0'' = 2(\omega + \omega^{-1}) = \eta_0' + \sqrt{\eta_0'^2 - \eta_1'}.$$

Das reguläre Siebzehneck ist also geometrisch konstruierbar unter Verwendung allein von Zirkel und Lineal.

Es möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Auflösung der zweiten Gleichung in (5) nicht notwendig ist, da, wie durch Ausrechnung gezeigt werden kann,

$$\eta_1' = -\frac{1}{2}\eta_0'^3 + 3\eta_0' - \frac{3}{2},$$

$$\eta_3' = \eta_0'^3 + \eta_0'^2 + 6\eta_0' - 1$$

wird.

§ 136. II. Wir kommen zum zweiten Beispiele $p = 19$, und setzen jetzt

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{19} + i\sin\frac{2\pi}{19} = \begin{bmatrix} c & \frac{2\pi}{19} \\ s & \end{bmatrix},$$

dann sind alle primitiven 19^{ten} Einheitswurzeln durch die Potenzen von ω, d. h. durch

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \ldots,\ \omega^{16},\ \omega^{17},\ \omega^{18}$$

bestimmt. Hiermit bilden wir die Summen

$$(9)\qquad \begin{cases} \eta_0 = \omega + \omega^4 + \omega^{16} + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{17} + \omega^{11} + \omega^6 + \omega^5, \\ \eta_1 = \omega^2 + \omega^8 + \omega^{13} + \omega^{14} + \omega^{18} + \omega^{15} + \omega^3 + \omega^{12} + \omega^{10}, \end{cases}$$

die so beschaffen sind, daß jeder Summand die vierte Potenz des ihm vorhergehenden und der erste die vierte Potenz des letzten wird (unter Berücksichtigung von $\omega^{19} = 1$). Wir suchen die Koeffizienten der quadratischen Gleichung

$$(\eta - \eta_0)(\eta - \eta_1) = \eta^2 - (\eta_0 + \eta_1)\eta + \eta_0\eta_1 = 0$$

auf und finden für sie durch direkte Berechnung aus (9)

$$\eta_0 + \eta_1 = -1,\quad \eta_0\eta_1 = 9 + 4(\eta_0 + \eta_1) = 9 - 4 = 5.$$

Also hat die Gleichung

$$(10)\qquad \eta^2 + \eta + 5 = 0$$

als Wurzeln η_0 und η_1, was wir so schreiben

$$\eta_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}.$$

Um den Wurzeln η_0, η_1 die Zeichen $+$, $-$ richtig zuzuordnen, betrachten wir die imaginäre Koordinate von η_0; diese wird wegen der ersichtlichen Ungleichung

$$\Big[\sin\frac{\pi}{19} + \sin\frac{2\pi}{19} - \sin\frac{3\pi}{19} - \sin\frac{4\pi}{19} + \sin\frac{5\pi}{19} - \sin\frac{6\pi}{19} + \sin\frac{7\pi}{19} + \sin\frac{8\pi}{19} + \sin\frac{9\pi}{19}\Big] > 0$$

positiv, so daß sich ergibt

$$(11)\qquad \eta_0 = \frac{-1 + \sqrt{19}\,i}{2},\quad \eta_1 = \frac{-1 - \sqrt{19}\,i}{2}.$$

Weiter zerlegen wir η_0 und η_1 in je drei Partialsummen

$$(12)\qquad \begin{cases} \eta_0' = \omega + \omega^7 + \omega^{11}, & \eta_3' = \omega^2 + \omega^{14} + \omega^3, \\ \eta_1' = \omega^4 + \omega^9 + \omega^6, & \eta_4' = \omega^8 + \omega^{18} + \omega^{12}, \\ \eta_2' = \omega^{16} + \omega^{17} + \omega^5, & \eta_5' = \omega^{13} + \omega^{15} + \omega^{10}, \end{cases}$$

und berechnen die elementaren symmetrischen Funktionen der η_0', η_1', η_2' und die der η_3', η_4', η_5', nämlich

$$\eta_0' + \eta_1' + \eta_2' = \eta_0, \quad \eta_0'\eta_1' + \eta_1'\eta_2' + \eta_2'\eta_0' = -1 + \eta_0,$$
$$\eta_0'\eta_1'\eta_2' = -1 + \eta_1;$$
$$\eta_3' + \eta_4' + \eta_5' = \eta_1, \quad \eta_3'\eta_4' + \eta_4'\eta_5' + \eta_5'\eta_3' = -1 + \eta_1,$$
$$\eta_3'\eta_4'\eta_5' = -1 + \eta_0.$$

Daraus folgt

$$(13) \quad \begin{aligned} &(\eta - \eta_0')(\eta - \eta_1')(\eta - \eta_2') = \eta^3 - \eta_0 \cdot \eta^2 + (\eta_0 - 1)\eta + (1 - \eta_1); \\ &(\eta - \eta_3')(\eta - \eta_4')(\eta - \eta_5') = \eta^3 - \eta_1 \cdot \eta^2 + (\eta_1 - 1)\eta + (1 - \eta_0), \end{aligned}$$

und die Auflösung der Gleichungen, die durch das Nullsetzen dieser beiden Ausdrücke (13) entstehen, liefert die sechs Größen η_α'. Es sind dies zwei Gleichungen dritten Grades. Die Zuordnung ihrer Wurzeln zu den Werten η_0', η_1', η_2' bzw. zu η_3', η_4', η_5' geschieht durch Betrachtung der reellen Teile der η', deren Hälften für das erste Tripel der η' gleich

$$(13\text{a}) \quad \begin{aligned} &\cos\frac{2\pi}{19} \cdot \quad \cdot \cos\frac{5\pi}{19} - \cos\frac{3\pi}{19}; \quad \cos\frac{8\pi}{19} - \cos\frac{1\pi}{19} - \cos\frac{7\pi}{19}; \\ &\cos\frac{6\pi}{19} + \cos\frac{4\pi}{19} - \cos\frac{9\pi}{19} \end{aligned}$$

sind. Man sieht sofort, daß der zweite dieser Ausdrücke negativ, der dritte dagegen positiv ist. Ferner zeigt die Relation zwischen den Kosinus

$$\cos\frac{1\pi}{19} + \cos\frac{2\pi}{19} + \cos\frac{7\pi}{19} > \cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + \cos\frac{8\pi}{19},$$

daß der erste der Ausdrücke (13a) größer als der zweite ist, also zwischen diesem Ausdruck und dem dritten liegt. Dadurch wird die Zuordnung der Wurzeln von

$$(13\text{b}) \qquad \eta^3 - \eta_0\eta^2 + (\eta_0 - 1)\eta + (1 - \eta_0) = 0$$

zu den ersten drei Werten (12) unzweideutig bestimmt; und ähnliches gilt für das zweite Tripel in (12).

Weiter sind die Summanden von η_0' die Wurzeln von

$$(14) \qquad (\eta - \omega^1)(\eta - \omega^7)(\eta - \omega^{11}) = \eta^3 - \eta_0'\eta^2 + \eta_4'\eta - 1 = 0,$$

und danach hat es den Anschein, als ob für die Berechnung der Koeffizienten dieser Gleichung außer der Lösung von (13b) noch die von

$$(13\text{c}) \qquad \eta^3 - \eta_1\eta^2 + (\eta_1 - 1)\eta + (1 - \eta_1) = 0$$

nötig wäre; es wird aber in der allgemeinen Behandlung der Kreisteilungsgleichung gezeigt werden, daß η_4' als ganze Funktion von η_0' mit konstanten Koeffizienten darstellbar ist.

Die Auflösung von (14) liefert ω. Zur Bestimmung dieser Größe brauchen wir also die Lösung einer Gleichung zweiten und zweier Gleichungen dritten Grades.

Die Aufeinanderfolge in den Graden der zu lösenden Hilfsgleichungen ist dabei willkürlich. So hätte die Verteilung der Potenzen von ω in die Summen

$$\eta_0 = \omega + \omega^{12} + \omega^{11} + \omega^{18} + \omega^7 + \omega^8, \quad \eta_1 = \omega^{10} + \omega^6 + \omega^{15} + \omega^9 + \omega^{13} + \omega^4,$$
$$\eta_2 = \omega^5 + \omega^3 + \omega^{17} + \omega^{14} + \omega^{16} + \omega^2$$

und dieser dann in

$$\begin{array}{lll} \eta_0' = \omega + \omega^{18}, & \eta_1' = \omega^{12} + \omega^7, & \eta_2' = \omega^{11} + \omega^8, \\ \eta_3' = \omega^{10} + \omega^9, & \eta_4' = \omega^6 + \omega^{13}, & \eta_5' = \omega^{15} + \omega^4, \\ \eta_6' = \omega^5 + \omega^{14}, & \eta_7' = \omega^3 + \omega^{16}, & \eta_8' = \omega^{17} + \omega^2 \end{array}$$

zuerst die Lösung zweier Gleichungen dritten und dann einer solchen zweiten Grades gefordert.

§ 137. Wir gehen jetzt, nach der Behandlung dieser Beispiele, die uns auf die allgemeinen Resultate vorbereiten sollten, zu der Theorie der Kreisteilung für eine willkürliche Primzahl p über, wie Gauß sie festgelegt hat.

Aus der Zahlentheorie ist uns bekannt, daß es für jede Primzahl p ganze Zahlen g von der Beschaffenheit gibt, daß die kleinsten positiven Reste bei den Divisionen der Glieder von

$$(15) \qquad g^1, g^2, g^3, \ldots, g^{p-2}, g^{p-1}$$

durch p als Divisor, von ihrer Reihenfolge abgesehen, mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-2, p-1$ übereinstimmen. Daher hat die Reihe (15) die gleichen Elemente wie

$$\varkappa_1 p + 1, \ \varkappa_2 p + 2, \ \varkappa_3 p + 3, \ \ldots, \ \varkappa_{p-2} p + (p-2), \ \varkappa_{p-1} p + (p-1),$$

wenn jedes $\varkappa_\alpha$ die größte positive ganze Zahl bedeutet, die in $(g^\alpha : p)$ enthalten ist. Da es nun bei den Potenzen der Einheitswurzel ω keine Wertänderung hervorruft, wenn man zu den Exponenten noch beliebige Vielfache von p hinzufügt, so folgt, daß die beiden Reihen von je $(p-1)$ Gliedern

$$\omega^1, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{p-2}, \omega^{p-1} \quad \text{und} \quad \omega^{g^1}, \omega^{g^2}, \omega^{g^3}, \ldots, \omega^{g^{p-2}}, \omega^{g^{p-1}}$$

bis auf die Reihenfolge der Glieder, die verschieden sein wird, doch in ihrer Gesamtheit miteinander übereinstimmen. Um die Schreibweise zu erleichtern, bezeichnen wir, wie Gauß es tut,

$$\omega^\alpha = [\alpha].$$

Danach können wir die $(p-1)$ Wurzeln ω^α auch in der, wichtige Vorzüge bietenden Anordnung

$$(16) \qquad [g],\ [g^2],\ [g^3],\ \ldots,\ [g^{p-2}],\ [g^{p-1}]$$

schreiben.

Wir zerlegen jetzt die Zahl $(p-1)$ in die beiden Faktoren e und f, so daß $(p-1) = e \cdot f$ ist, nehmen für λ eine beliebige ganze positive Zahl, setzen dann das Aggregat

$$(17) \quad [\lambda] + [\lambda g^e] + [\lambda g^{2e}] + \cdots + [\lambda g^{(f-2)e}] + [\lambda g^{(f-1)e}] = (f, \lambda),$$

bezeichnen diese Summe als eine f-gliedrige Periode und die Summanden auf der linken Seite als ihre Elemente. Ist $\lambda = 0$ oder ein Vielfaches von p, dann nimmt (17) den Zahlenwert f an; es soll in diesem Falle (17) eine uneigentliche Periode heißen. Von eigentlichen f-gliedrigen Perioden gibt es e, nämlich für $\lambda = g^1$, g^2, g^3, .. , g^{e-1}, g^e die Aggregate

$$(18) \quad \begin{cases} [g] + [g^{e+1}] + [g^{2e+1}] + \cdots + [g^{(f-1)e+1}] = (f, g), \\ [g^2] + [g^{e+2}] + [g^{2e+2}] + \cdots + [g^{(f-1)e+2}] = (f, g^2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [g^e] + [g^{2e}] + [g^{3e}] + \cdots + [g^{fe}] = (f, g^e); \end{cases}$$

daß keine anderen möglich sind, ersieht man aus der Gleichung

$$(f, g^{e+\alpha}) = (f, g^\alpha).$$

§ 138. Wir beschäftigen uns zunächst mit den wichtigsten Eigenschaften der Perioden (17) von f Gliedern.

I. Haben zwei f-gliedrige Perioden auch nur ein Element gemeinsam, so sind sie einander identisch gleich. Das ist klar; ebenso

II. Es ist

$$(19) \qquad (f, g) + (f, g^2) + \cdots + (f, g^e) = -1.$$

III. Ersetzt man in den Perioden (18) die Wurzel $\omega = [1]$ durch die Wurzel $\omega^g = [g]$, dann verschieben sich die e Perioden (18)

$$(f, g),\ (f, g^2),\ \ldots,\ (f, g^e)$$

untereinander zyklisch. Denn jedes Element $[g^\alpha]$ geht dadurch in $[g^{\alpha+1}]$ über. Hieraus folgt, daß, wenn man die Einheitswurzel ω durch $[g^e]$ ersetzt, alle Perioden (18) einzeln ungeändert bleiben.

IV. Alle Perioden haben verschiedene Zahlenwerte.

Denn aus der Relation $(f, g^{\alpha}) = (f, g^{\beta})$ würde folgen, daß eine Gleichung

$$\omega^{\alpha'} + \omega^{\alpha''} + \cdots = \omega^{\beta'} + \omega^{\beta''} + \cdots \qquad (0 < \alpha^{(\varrho)}, \beta^{(\varrho)} < p)$$

besteht, in der die Exponenten sämtlich untereinander verschieden sind (nach I) und zwischen 0 und p liegen. Dividiert man beide Seiten durch ω, so gelangt man zu einer Bestimmungsgleichung für ω von einem Grade $< (p-1)$. Das widerspricht der Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichung (S. 157, § 132). Im Falle, daß eine der Perioden uneigentlich ist, d. h. daß $(f, g^{\alpha}) = (f, 0)$, ersetzt man die rechte Seite durch das Produkt $-f\cdot(\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{p-1})$ und macht dann die gleichen Schlüsse wie soeben.

V. Jede ganze ganzzahlige Funktion $h(\omega)$ von ω, die ungeändert bleibt, wenn man in ihr $\omega = [1]$ durch $[g]$ ersetzt, hat einen ganzzahligen Wert. Es sei diese Funktion von ω gegeben durch

$$h(\omega) = c_0 + c_1[1] + c_2[g] + c_3[g^2] + \cdots + c_p[g^{p-1}];$$

dann ist nach der Voraussetzung, wenn man $[1]$ durch $[g]$, also jedes $[g^{\alpha}]$ durch $[g^{\alpha+1}]$ ersetzt,

$$h(\omega) = c_0 + c_1[g] + c_2[g^2] + c_3[g^3] + \cdots + c_p[1];$$

daraus folgt durch Gleichsetzung der rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen

$$(c_1 - c_p)[1] + (c_2 - c_1)[g] + (c_3 - c_2)[g^2] + \cdots = 0.$$

Auf Grund der Überlegungen in IV sind alle Koeffizienten dieser Gleichung Null, also ist

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_p,$$

und daher wird

$$h(\omega) = c_0 + c_1([1] + [g] + [g^2] + \cdots + [g^{p-1}]) = c_0 - c_1,$$

d. h. wie behauptet war: $h(\omega)$ ist eine ganzzahlige Konstante.

VI. Jede ganze ganzzahlige symmetrische Funktion der Perioden (18) hat einen ganzzahligen Wert. Wir ersetzen in dieser Funktion $\omega = [1]$ durch $\omega = [g]$; dabei verschieben sich nach III die Perioden zyklisch; die vorgelegte symmetrische Funktion ändert sich also nicht und hat nach V einen ganzzahligen konstanten Wert.

VII. Jede ganze ganzzahlige Funktion von ω, die sich nicht ändert, wenn man in ihr $\omega = [1]$ durch $[g^e]$ ersetzt, ist eine lineare ganzzahlige Funktion der Perioden (18). Es sei

$$h(\omega) = c_0 + c_1[1] + c_2[g^1] + \cdots + c_{e+1}[g^e] + c_{e+2}[g^{e+1}] + \cdots$$
$$+ c_{2e+1}[g^{2e}] + \cdots$$

die vorgelegte Funktion; dann ist, wenn man $\omega = [1]$ durch $\omega = [g^e]$ ersetzt, nach der Voraussetzung auch

$$h(\omega) = c_0 + c_1[g^e] + c_2[g^{e+1}] + \cdots + c_{e+1}[g^{2e}] + c_{e+2}[g^{2e+1}] + \cdots$$
$$+ c_{2e+1}[g^{3e}] + \cdots.$$

Daraus folgt durch Gleichsetzung der rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen

$$0 = (c_1 - c_{(f-1)e+1})[1] + (c_2 - c_{(f-1)e+2})[g^1] + \cdots + (c_{e+1} - c_1)[g^e]$$
$$+ (c_{e+2} - c_2)[g^{e+3}] + \cdots.$$

Nach den Überlegungen in IV sind alle Koeffizienten dieser Gleichung Null, also ist

$$c_1 \quad c_{e+1} = c_{2e+1} \qquad c_{(f-1)e+1},$$
$$c_{e+2} = c_{2e+2} \qquad c_{(f-1)e+2},$$

und deswegen

$$h(\omega) = c_0 + c_1([1] + [g^e] + [g^{2e}] + \cdots) + c_2([g^1] + [g^{e+1}]$$
$$+ [g^{2e+1}] + \cdots) + \cdots$$
$$= c_0 + c_1(f, g^0) + c_2(f, g) + \cdots + c_e(f, g^{e-1}).$$

VIII. Das Produkt zweier Perioden (18) ist eine ganzzahlige lineare homogene Funktion aller e eigentlichen Perioden und der einen uneigentlichen Periode. Wir nehmen als beide Faktoren eines Produktes die beiden Perioden

$$(f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda g^e] + [\lambda g^{2e}] + \cdots + [\lambda g^{(f-1)e}],$$
$$(f, \mu) = [\mu] + [\mu g^e] + [\mu g^{2e}] + \cdots + [\mu g^{(f-1)e}],$$

und bilden zuerst das Produkt je zweier untereinander stehender Summanden der rechten Seiten. Das gibt

$$[\lambda + \mu] + [(\lambda + \mu) g^e] + [(\lambda + \mu) g^{2e}] + \cdots = (f, \lambda + \mu).$$

Dann multiplizieren wir das erste Glied von (f, λ) mit dem zweiten von (f, μ); das zweite von (f, λ) mit dem dritten von (f, μ), usw. bis zum letzten Gliede von (f, λ), welches mit dem ersten von (f, μ) zu multiplizieren ist. Dabei erhält man die Summe

$$[\lambda + \mu g^e] + [(\lambda + \mu g^e) g^e] + [(\lambda + \mu g^e) g^{2e}] + \cdots = (f, \lambda + \mu g^e).$$

Weiter multiplizieren wir das erste Glied von (f, λ) mit dem dritten von (f, μ) usw. So ergibt sich als Schlußresultat

$$(f, \lambda)(f, \mu) = (f, \lambda + \mu) + (f, \lambda + \mu g^e) + (f, \lambda + \mu g^{2e}) + \cdots$$
$$+ (f, \lambda + \mu g^{(f-1)e}),$$

und dadurch ist der Satz VIII bewiesen.

Aus ihm folgt, daß jede ganze ganzzahlige Funktion der Perioden (18) als ganzzahlige lineare Funktion derselben darstellbar ist.

IX. Die e Perioden (18) sind die Wurzeln einer irreduktiblen Gleichung e^{ten} Grades

$$\text{(18a)} \qquad H(z) = z^e + h_1 z^{e-1} + h_2 z^{e-2} + \cdots + h_e$$
$$= (z - (f, g))(z - (f, g^2)) \cdots (z - (f, g^e)) = 0,$$

deren Koeffizienten h_α ganze Zahlen sind. Bis auf die Behauptung der Irreduktibilität folgt der Satz IX aus VI; die Irreduktibilität von $H(z)$ wird folgendermaßen bewiesen:

Ist $H(z)$ zerlegbar, so sei $H_1(z)$ derjenige irreduktible Faktor von $H(z)$, der die Größe

$$z = (f, g) = \omega^{g^1} + \omega^{g^{e+1}} + \omega^{g^{2e+1}} + \cdots$$

zum Wurzel hat; dann hätte die Gleichung in ζ als Unbekannte

$$H_1\left(\zeta^{g^1} + \zeta^{g^{e+1}} + \cdots + \zeta^{g^{(f-1)e+1}}\right) = 0$$

die Wurzel $\zeta = \omega$ mit der irreduktiblen Gleichung (1), nämlich der Kreisteilungsgleichung, gemeinsam, und wegen der Irreduktibilität alle Wurzeln $\zeta = \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{p-1}$ oder $\zeta = [g], [g^2], [g^3], \ldots, [g^{p-1}]$. Dann folgt, daß $H_1(z) = 0$ alle Perioden $(f, g), (f, g^2), (f, g^3), \ldots, (f, g^e)$, die ja nach IV voneinander verschieden sind, zu Wurzeln hat; also ist $H_1(z) = H(z)$, d. h. $H = 0$ ist irreduktibel.

X. Jede Periode (f, μ) ist als ganze Funktion jeder anderen eigentlichen Periode (f, λ) darstellbar. Aus dem Schlußsatze des Beweises von VIII folgt, daß man setzen kann

$$(f, \lambda)^\varrho = a_{\varrho 0} + a_{\varrho 1}(f, g^1) + a_{\varrho 2}(f, g^2) + \cdots + a_{\varrho e}(f, g^e)$$
$$(\varrho = 2, 3, \ldots, e-1).$$

Wir nehmen zu diesem Systeme die beiden Gleichungen hinzu

$$0 = a_{00} + a_{01}(f, g^1) + a_{02}(f, g^2) + \cdots + a_{0e}(f, g^e),$$
$$(f, \lambda) = a_{10} + a_{11}(f, g^1) + a_{12}(f, g^2) + \cdots + a_{1e}(f, g^e),$$

in deren erster alle Koeffizienten $a_{0\mu}$ den Wert 1 haben, während in der letzten alle $a_{1\mu}$ verschwinden mit Ausnahme der zu dem Gliede $(f, g^\nu) = (f, \lambda)$ gehörigen $a_{1\nu}$, der $= 1$ zu setzen ist.

Wir fassen die so erhaltenen e Gleichungen als ein lineares System mit den e Unbekannten (f, g), (f, g^2), . . ., (f, g^e) auf. Das ist ein unabhängiges System; denn wäre dies nicht so, dann könnte man e ganze Zahlen $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{e-1}$ finden, für die

$$q_0(f, \lambda)^{e-1} + q_1(f, \lambda)^{e-2} + \cdots + q_{e-2}(f, \lambda)^1 + q_{e-1} = 0$$

wäre; das widerspräche aber dem Satze IX, demzufolge $H(z)$ irreduktibel ist.

Aus der Unabhängigkeit der e Gleichungen folgt durch Auflösung, daß jede der rechts auftretenden e Perioden als ganze Funktion von (f, λ) darstellbar ist. Man kann demnach setzen, wie behauptet wurde,

$$(20) \quad (f, g^\varrho) = \beta_{\varrho 0} + \beta_{\varrho 1}(f, g) + \beta_{\varrho 2}(f, g)^2 + \cdots + \beta_{\varrho, e-1}(f, g)^{e-1}.$$

XI. Die Gleichung (20) liefert bei zyklischer Vertauschung der Perioden (18) die Werte

$$(20\text{a}) \quad (f, g^{\varrho+\mu}) = \beta_{\varrho 0} + \beta_{\varrho 1}(f, g^{1+\mu}) + \beta_{\varrho 2}(f, g^{2+\mu}) + \cdots + \beta_{\varrho, e-1}(f, g^\mu)$$

für $\mu = 1, 2, 3, \ldots, e-1, e$. Denn setzt man in (20) mit Rücksicht auf (16), (17), (18) z statt ω ein, so hat die entstehende Gleichung in z die Wurzel $z = \omega$, daher nach IX wegen der Irreduktibilität auch $z = \omega^g$, ... Man kann deshalb in (20) ω durch ω^g, ω^{g^2}, . . . ersetzen und kommt dadurch auf (20a).

XII. **Die f Glieder einer jeden der e Perioden (18) sind die Wurzeln einer Gleichung, deren Koeffizienten lineare ganzzahlige Funktionen dieser Perioden sind.** Diese e Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} &(z - [g^1])(z - [g^{e+1}])(z - [g^{2e+1}]) \cdots (z - [g^{(f-1)e+1}]) = 0, \\ (21) \quad &(z - [g^2])(z - [g^{e+2}])(z - [g^{2e+2}]) \cdots (z - [g^{(f-1)e+2}]) = 0, \end{aligned}$$

die Koeffizienten einer jeden dieser e Gleichungen sind symmetrische Funktionen der Elemente der zugehörigen Periode, ändern sich also nicht, wenn man in ihnen $\omega = [1]$ durch $[g^e]$ ersetzt. Nach VII sind somit sämtliche Koeffizienten in (21) von der Form

$$(21\text{a}) \qquad c_0 + c_1(f, g) + c_2(f, g^2) + \cdots + c_e(f, g^e),$$

in der die Größen $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_e$ ganze Zahlen bedeuten.

Dieser Satz gibt ein treffendes Beispiel für die in § 52, S. 63 angestellten Betrachtungen über Reduktibilität und Irreduktibilität.

Die Gleichung (1) ist in dem Rationalitätsbereiche, der lediglich aus den rationalen Zahlen gebildet wird, irreduktibel. Nimmt man dagegen die e Perioden (18) oder, was gemäß X das gleiche bewirkt, auch nur eine von ihnen zum Rationalitätsbereiche hinzu, so wird (1) zerlegbar, derart, daß die linken Seiten der Gleichungen (18) die einzelnen irreduktiblen Faktoren werden, in die das Polynom von (1) zerfällt. Die Irreduktibilität ergibt sich aus dem Satze:

XIII. In dem Rationalitätsbereiche, der aus den rationalen Zahlen und einer der f-gliedrigen Perioden (18) gebildet wird, ist jede der Gleichungen (21) irreduktibel. Wäre z. B. die erste der Gleichungen (21) zerlegbar, und $H(z)$ der Teiler, der den Wurzelfaktor $(z-[g])$ enthält, so können wir unter Andeutung des Rationalitätsbereiches der Koeffizienten hinter dem Semikolon

$$H([g]; (f, g^1), (f, g^2), \ldots, (f, g^e)) = 0$$

schreiben. Setzt man nun sowohl in $[g]$ als in allen Perioden (f, g^1), $(f, g^2), \ldots$ statt ω ein z, so entsteht eine Gleichung in z mit rationalen Koeffizienten, die die Wurzel $z = \omega$ und wegen der Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichung dann auch die Wurzeln

$$z = [g^e], \quad z = [g^{2e}], \ \ldots$$

besitzt. Daher ist gleichfalls

$$H([g^{e+1}]; (f, g^{e+1}), (f, g^{e+2}), \ldots, (f, g^{2e}))$$
$$= H([g^{e+1}]; (f, g), (f, g^2), \ldots, (f, g^e)) = 0,$$

d. h. $H(z) = 0$ hat neben $z = [g]$ auch die Wurzeln

$$z = [g^{e+1}], \quad z = [g^{2e+1}], \ \ldots$$

Der irreduktible Faktor $H(z)$ fällt sonach mit dem Gleichungspolynom selbst zusammen. Demnach ist die erste und ebenso jede folgende der Gleichungen (18) irreduktibel.

§ 139. Die abgeleiteten Resultate liefern die Lösung der Gleichung (1) auf folgendem Wege: Man bestimme eine Wurzel der Gleichung (21) vom Grade e. Dann sind wegen $H(z) = 0$ alle ihre Wurzeln rational durch diese eine darstellbar, und (1) zerfällt in die Gleichungen (18). Bestimmt man eine Wurzel von irgendeiner unter diesen Gleichungen f^{ten} Grades, so ist dies eine primitive Wurzel von (1), und ihre Potenzen ergeben die übrigen Wurzeln von (1). Hiermit ist der erste Schritt zur Zerlegung der algebraischen Auflösung von (1) in ihre einfachsten Elemente geliefert.

§ 140. Gesetzt, man könnte f weiter in zwei Faktoren zerlegen, $f = e' \cdot f'$, dann bilden wir die $e \cdot e'$ Perioden von f' Elementen

$$(22)\quad \begin{cases} [g^1] + [g^{ee'+1}] + \cdots + [g^{(f'-1)ee'+1}] = (f', g), \\ [g^2] + [g^{ee'+2}] + \cdots + [g^{(f'-1)ee'+2}] = (f', g^2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [g^{e+1}] + [g^{ee'+e+1}] + \cdots + [g^{(f'-1)ee'+e+1}] = (f', g^{e+1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [g^{ee'}] + [g^{2ee'}] + \cdots + [g^{f'ee'}] = (f', g^{ee'}). \end{cases}$$

Natürlich gelten von ihnen alle früher abgeleiteten, auf die Perioden (18) bezüglichen Sätze. Die neu aufzustellenden Theoreme beziehen sich nur auf den Zusammenhang zwischen den Perioden (18) und (22) untereinander. Die Gesamtheit der Elemente von (f', g^α), $(f', g^{e+\alpha})$, $\ldots$, $(f', g^{(e'-1)e+\alpha})$ gibt sämtliche Elemente von (f, g^α), dadurch daß $\alpha = 1, 2, \ldots, e$ gesetzt wird.

Die Gleichungen e^{ten} Grades

$$(23)\qquad (z-(f', g^\alpha))(z-(f', g^{e+\alpha}))\cdots(z-(f', g^{(e'-1)e+\alpha})) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, e)$$

haben Koeffizienten, die linear und ganzzahlig durch die Perioden (14) ausdrückbar sind. Denn diese Koeffizienten sind symmetrische ganzzahlige Funktionen der Perioden (f', g^α), $\ldots$, $(f', g^{(e'-1)e+\alpha})$, und da sich diese Perioden durch die Einführung von $[g^e]$ an Stelle von $[1]$ nur zyklisch vertauschen, so bleiben die Koeffizienten selbst bei dieser Substitution ungeändert. Also folgt nach VI die in (23) ausgesprochene Eigenschaft.

Die Gleichungen (23) sind in dem aus den rationalen Zahlen und den Perioden gebildeten Rationalitätsbereiche irreduktibel. Wäre nämlich $H(z)$ der irreduktible Faktor des Gleichungspolynoms, der den Wurzelfaktor $(z-(f', g^\alpha))$ enthält, so hätte unter Andeutung des Rationalitätsbereiches die Gleichung mit der Unbekannten z etwa

$$H(z; (f, g), (f, g^2), \ldots) = 0$$

die Wurzel $z = (f', g^\alpha)$; also gilt die Relation

$$H((f', g^\alpha); (f, g), (f, g^\alpha), \ldots) = 0.$$

Setzt man in ihr überall z statt ω ein, so entsteht hieraus eine Gleichung, die mit (23) eine und daher alle Wurzeln gemeinsam hat. Folglich wäre auch

$$H((f', g^{e+\alpha}); (f, g), (f, g^2), \ldots) = 0,$$

da die f-gliedrigen Perioden sich nicht ändern, wenn man in ihnen $[1]$ durch $[g^e]$ ersetzt. Demnach hätte $H(z) = 0$ auch die Wur-

zeln $z = (f', g^{e+\alpha}), (f', g^{2e+\alpha}), \ldots$; das widerspricht aber einer Annahme der Reduktibilität von (23).

§ 141. Die bisher abgeleiteten Resultate setzen uns in die Lage, jetzt den zweiten Teil der Lösungsvorschrift aus § 139, der die Auflösung einer Gleichung f^{ten} Grades forderte, weiter zu vereinfachen. Ist die Gleichung (22) vom Grade e aufgelöst, und sind dadurch die Perioden (f, g^{λ}) bekannt geworden, so kann man diese in den Rationalitätsbereich aufnehmen. Die e Gleichungen (23) des Grades e' haben Koeffizienten, die diesem erweiterten Rationalitätsbereiche angehören. Hat man eine der Gleichungen (23) aufgelöst, dann lassen sich alle $e \cdot e'$ Perioden von je f' Gliedern rational darstellen, und die Lösung einer Gleichung f'^{ten} Grades vollendet die Lösung von (18). Es sind demnach die Wurzeln einer Gleichung e^{ten}, einer solchen e'^{ten} und einer solchen f'^{ten} Grades zu bestimmen.

Hierdurch sind wir zu der nachstehenden von C. Fr. Gauß gegebenen Lösungsvorschrift gelangt. Es sei, in seine Primfaktoren zerlegt, $(p-1) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdots \zeta$, und es möge

$$\frac{p-1}{\alpha} = \beta \cdot \gamma \cdots \zeta = a, \quad \frac{p-1}{\alpha\beta} = \gamma \cdots \zeta = b, \ \ldots$$

gesetzt werden. Dann verteilen wir zuerst die $(p-1)$ Wurzeln $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{p-1}$ in α Perioden von je a Gliedern; diese Glieder einzeln wieder in β Perioden von je b Gliedern usw. Die Auflösung einer Gleichung vom Grade α gibt uns die Werte der ersten α Perioden; ja, man braucht sogar nur eine der Wurzeln der Gleichung, da alle durch die eine rational darstellbar sind. Dann sind die Koeffizienten aller α Gleichungen β^{ten} Grades bestimmt, von denen die $\beta\alpha$ Perioden von je b Gliedern abhängen. Von einer derselben suchen wir eine beliebige Wurzel; durch diese können wir alle Perioden von b Gliedern rational darstellen und durch sie die Koeffizienten der $\alpha\beta$ Gleichungen γ^{ten} Grades, von denen die $\alpha\beta\gamma$ Perioden von je c Gliedern abhängen, usf., bis die Operationen mit der Bestimmung einer Wurzel einer Gleichung des Grades ζ ihren Abschluß finden.

§ 142. Es liegt bei dieser Lösung noch eine Schwierigkeit vor, die ans Licht gezogen und beseitigt werden muß. Ist willkürlich eine primitive p^{te} Einheitswurzel als ω fixiert, etwa

$$\omega = \begin{bmatrix} c & \frac{2\pi}{p} \\ s & \end{bmatrix},$$

so sind dadurch zugleich sämtliche Perioden bestimmt, wie (17) zeigt. Wenn man andererseits durch Ausführung der dargelegten Gaußschen

Lösungsmethode auf eine f-gliedrige Periode geführt wird, so steht die Bestimmung darüber noch aus, auf welche der e Perioden man dabei gekommen ist. Nun ist in IV gezeigt worden, daß alle diese Perioden verschiedene Zahlenwerte besitzen. Berechnet man also mit Hilfe einer Tafel für die goniometrischen Funktionen sämtliche Perioden etwa so weit, daß die Verschiedenheit ihrer Werte zutage tritt, dann liefert eine einfache Vergleichung mit dem Werte des zu bestimmenden (f, α) die eindeutige Feststellung von α. — Die Behandlung der Beispiele $p = 17$ und $p = 19$ (§ 136) zeigt übrigens, daß es zur Bestimmung von α noch andere Wege gibt.

Zwölftes Kapitel.

Zyklische und reziproke Gleichungen.

§ 143. Es sei unter $\theta(x)$ eine rationale ganze Funktion von x verstanden. Setzt man in ihr $\theta(x)$ für x ein, bildet man also $\theta[\theta(x)]$, so werde dies mit $\theta^2(x)$ bezeichnet; ebenso setzen wir weiter in gleicher Art

$$\theta[\theta^2(x)] = \theta^3(x), \quad \theta[\theta^3(x)] = \theta^4(x), \quad \ldots, \quad \theta[\theta^\nu(x)] = \theta^{\nu+1}(x), \quad \ldots,$$

so daß hier die oberen Indizes nicht als Potenzexponenten aufzufassen sind.

Wir wollen die Gleichungen n^{ten} Grades

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

betrachten, deren Wurzeln die n Größen

$$x_1,\ \theta(x_1),\ \theta^2(x_1),\ \ldots,\ \theta^{n-1}(x_1) \tag{2}$$

sind, und bei denen

$$\theta^n(x_1) = x_1 \tag{3}$$

sein soll, d. h. bei denen die Zahlenwerte der beiden Seiten von (3) übereinstimmen. Aus (3) folgt für jedes positive ganzzahlige k die Gleichung

$$\theta^{n+k}(x_1) = \theta^k(x_1). \tag{4}$$

Gleichungen, bei denen diese Voraussetzungen sich verwirklichen, heißen zyklische Gleichungen. Zu ihnen gehören die im vorigen Kapitel behandelten Kreisteilungsgleichungen, denn für sie ist $n = p - 1$ und

$$f(x) \equiv \frac{x^p - 1}{x - 1}; \quad \theta(x) \equiv x^g; \quad x_1 = \omega\left[\begin{matrix} c \\ s \end{matrix}\ \frac{2\pi}{p}\right];$$

ferner gehören zu ihnen die Periodengleichungen e^{ten} Grades IX, S. 170, wie aus X und XI hervorgeht. Für sie gelten demnach die jetzt herzuleitenden Resultate gleichfalls.

§ 144. Verstehen wir nun unter α eine primitive Wurzel der Gleichung

$$x^n - 1 = 0, \tag{5}$$

dann sind jetzt alle n^{ten} Einheitswurzeln durch die n Glieder

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^{n-1}$$

gegeben. Mit ihnen bilden wir die n Ausdrücke

$$v_\varkappa = x_1 + \alpha^\varkappa \theta(x_1) + \alpha^{2\varkappa}\theta^2(x_1) + \alpha^{3\varkappa}\theta^3(x_1) + \cdots + \alpha^{(n-1)\varkappa}\theta^{n-1}(x_1) \tag{6}$$
$$(\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1)$$

und untersuchen die Änderung, die das Produkt

$$v_\varkappa \cdot v_1^{n-\varkappa} = (x_1 + \alpha^\varkappa\theta(x_1) + \alpha^{2\varkappa}\theta^2(x_1) + \cdots)\cdot \tag{7}$$
$$(x_1 + \alpha\theta(x_1) + \alpha^2\theta^2(x_1) + \cdots)^{n-\varkappa}$$

erleidet, wenn man in ihm x_1 durch $\theta(x_1)$, also jedes $\theta^\varrho(x_1)$ durch $\theta^{\varrho+1}(x_1)$ ersetzt.

Dabei geht die rechte Seite der letzten Gleichung in

$$(\theta(x_1) + \alpha^\varkappa\theta^2(x_1) + \alpha^{2\varkappa}\theta^3(x_1) + \cdots)\cdot$$
$$(\theta(x_1) + \alpha\theta^2(x_1) + \alpha^2\theta^3(x_1) + \cdots)^{n-\varkappa}$$
$$= \alpha^{-\varkappa}(\alpha^\varkappa\theta(x_1) + \alpha^{2\varkappa}\theta^2(x_1) + \alpha^{3\varkappa}\theta^3(x_1) + \cdots)\,\alpha^{-n+\varkappa}\cdot$$
$$(\alpha\theta(x_1) + \alpha^2\theta^2(x_1) + \alpha^3\theta^3(x_1) + \cdots)^{n-\varkappa}$$
$$v_\varkappa v_1 \qquad v_\varkappa v_1$$

über, d. h. sie ändert sich nicht. Man kann ausführlicher mit Angabe des Arguments bei den v schreiben

$$v_\varkappa[\theta(x_1)]\cdot v_1[\theta(x_1)]^{n-\varkappa} = v_\varkappa(x_1)\cdot v_1(x_1)^{n-\varkappa}.$$

Wenn man hierin nochmals x_1 durch $\theta(x_1)$ ersetzt, usw., dann folgt, wie aus den eckigen Klammern ersichtlich ist,

$$= v_\varkappa[\theta^2(x_1)]\cdot v_1[\theta^2(x_1)]^{n-\varkappa} = v_\varkappa[\theta^3(x_1)]\cdot v_1[\theta^3(x_1)]^{n-\varkappa} = \cdots.$$

Demnach wird jedes

$$v_\varkappa\cdot v_1^{n-\varkappa} = \frac{1}{n}[v_\varkappa(x_1)\cdot v_1(x_1)^{n-\varkappa} + v_\varkappa(\theta)\cdot v_1(\theta)^{n-\varkappa} \tag{8}$$
$$+ v_\varkappa(\theta^2)\cdot v_1(\theta^2)^{n-\varkappa} + \cdots]$$

eine symmetrische Funktion der Wurzeln von (1), also rational in den

Koeffizienten von (1) darstellbar, kann demnach als bekannt angesehen werden. Wir bezeichnen

(9) $$v_{\varkappa} \cdot v_1^{n-\varkappa} = L_{\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

wo die $L_{\varkappa}$ rational in den Koeffizienten von $f(x)$ und denen von $\theta(x)$ sind. Insbesondere ist für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$

$$v_0 \cdot v_1^n = L_0; \qquad v_1^n = L_1,$$

so daß man durch Ausziehung einer n^{ten} Wurzel aus einer bekannten Größe L_1 zu

(10) $$v_1 = \sqrt[n]{L_1}$$

kommt, und dann weiter rational durch v_1 die Größen

$$v_0 = \frac{L_0}{L_1}, \quad v_2 = \frac{L_2}{L_1} v_1^2, \quad v_3 = \frac{L_3}{L_1} v_1^3, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = \frac{L_{n-1}}{L_1} v_1^{n-1}$$

darstellen kann. Hierdurch ergibt sich das System von Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1 + \theta(x_1) + \theta^2(x_1) + \theta^3(x_1) + \cdots &= \frac{L_0}{L_1} \\
x_1 + \alpha\,\theta(x_1) + \alpha^2\theta^2(x_1) + \alpha^3\theta^3(x_1) + \cdots &= \sqrt[n]{L_1}, \\
x_1 + \alpha^2\theta(x_1) + \alpha^4\theta^2(x_1) + \alpha^6\theta^3(x_1) + \cdots &= \frac{L_2}{L_1}\sqrt[n]{L_1^2}, \\
x_1 + \alpha^3\theta(x_1) + \alpha^6\theta^2(x_1) + \alpha^9\theta^3(x_1) + \cdots &= \frac{L_3}{L_1}\sqrt[n]{L_1^3}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots ;
\end{aligned}$$

wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Potenzen der primitiven n^{ten} Einheitswurzel α

$$1, \ \alpha^{-\varkappa}, \ \alpha^{-2\varkappa}, \ \alpha^{-3\varkappa}, \ \ldots, \ \alpha^{-(n-1)\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

multipliziert und die n Produkte addiert, dann folgt

(11) $$\theta^{\varkappa}(x_1) = \frac{1}{nL_1}\Big[L_0 + \alpha^{-\varkappa}L_1\sqrt[n]{L_1} + \alpha^{-2\varkappa}L_2\sqrt[n]{L_1^2} + \alpha^{-3\varkappa}L_3\sqrt[n]{L_1^3} + \cdots + \alpha^{-(n-1)\varkappa}L_{n-1}\sqrt[n]{L_1^{n-1}}\Big].$$

Bedenkt man, daß die Potenzen von α die n^{ten} Einheitswurzeln sind, so kann man diese Potenzen in die n-deutigen n^{ten} Wurzeln aus L_1 einbegreifen und schreiben

(12) $$x_1 = \frac{1}{nL_1}\Big[L_0 + L_1\sqrt[n]{L_1} + L_2\big(\sqrt[n]{L_1}\big)^2 + L_3\big(\sqrt[n]{L_1}\big)^3 + \cdots + L_{n-1}\big(\sqrt[n]{L_1}\big)^{n-1}\Big],$$

wo x_1 jede n^{te} Einheitswurzel von (1) sein kann.

Können die Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades in der Form

$$x_1, \ \theta(x_1), \ \theta^2(x_1), \ \ldots, \ \theta^{n-1}(x_1)$$

dargestellt werden, wo $\theta(x)$ eine rationale Funktion von x bedeutet, für die $\theta^n(x_1)$ wieder $= x_1$ wird, so ist die Gleichung durch Wurzelausdrücke lösbar.

§ 145. Wir wollen jetzt die Voraussetzungen über (1) erweitern: (1) sei eine irreduktible Gleichung, bei der zwischen zwei Wurzeln x' und x_1 eine rationale Beziehung besteht, etwa

$$x' = \theta(x_1). \tag{13}$$

Demnach ist

$$f(x') = f(\theta x_1) = 0,$$

d. h. x_1 ist eine Wurzel der Gleichung

$$f(\theta x) = 0.$$

Da diese mit der irreduktiblen Gleichung (1) eine Wurzel gemein hat, so hat sie alle gemeinsam und insbesondere $\theta(x_1)$, d. h. es ist identisch

$$f(\theta[\theta x_1]) = f(\theta^2(x_1)) = 0.$$

Folglich hat (1) auch die Wurzel $x = \theta^2(x_1)$. Daraufhin beweist man in ähnlicher Art die Existenz der Wurzel $x = \theta^3(x_1)$ von (1) usw. Allgemein: Jedes Glied der Reihe

$$x_1, \ \theta(x_1), \ \theta^2(x_1), \ \theta^3(x_1), \ \ldots, \ \theta^\varkappa(x_1), \ \ldots \tag{14}$$

ist eine Wurzel von (1). Da aber diese Reihe unendlich viele Glieder enthält, während (1) nur n Wurzeln besitzt, so müssen gewisse Gleichungen von der Form

$$\theta^{\varkappa+\lambda}(x_1) = \theta^\varkappa(x_1)$$

gelten. Schreiben wir diese Gleichung in der Gestalt

$$\theta^\lambda[\theta^\varkappa(x_1)] = \theta^\varkappa(x_1),$$

so sehen wir, daß die beiden Gleichungen in y

$$\theta^\lambda(y) = y \quad \text{und} \quad f(y) = 0$$

eine Wurzel, nämlich $y = \theta^\varkappa(x_1)$ gemeinsam haben; wegen der Irreduktibilität von $f(y) = 0$ hat dann $\theta^\lambda(y) = y$ alle Wurzeln von $f(y) = 0$ zu Wurzeln, insbesondere $y = x_1$, d. h. es ist $\theta^\lambda(x_1) = x_1$. Also gibt es in (14) Glieder, die dem ersten gleich werden. Tritt dies beim

Durchlaufen der Reihe (14) von links nach rechts zum ersten Male für $\lambda = m$ ein, dann erkennt man leicht, daß auch

$$\theta^{\alpha}(x_1) = \theta^{m+\alpha}(x_1) = \theta^{2m+\alpha}(x_1) = \cdots \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

ist, und daß die m Glieder

$$(15) \qquad x_1,\ \theta(x_1),\ \theta^2(x_1),\ \ldots,\ \theta^{m-1}(x_1)$$

alle untereinander verschieden sind.

Stellt (15) alle Wurzeln von (1) dar, d. h. ist $m = n$, dann wird (1) eine zyklische Gleichung.

Ist $m < n$, dann gibt es Wurzeln $x = x_2$ von (1), die in (15) nicht vorkommen. Wendet man auf x_2 genau die Schlüsse an, die von $x = x_1$ auf (15) geführt haben, so kommt man auf eine Reihe

$$(15\,\mathrm{a}) \qquad x_2,\ \theta(x_2),\ \theta^2(x_2),\ \ldots,\ \theta^{m'-1}(x_2)$$

von lauter verschiedenen Wurzeln von (1), und es ist

$$\theta^{m'}(x_2) = x_2.$$

Wir finden $m' = m$. Wäre nämlich etwa $m' < m$, so folgt, da die beiden Gleichungen

$$f(y) = 0 \quad \text{und} \quad \theta^{m'}(y) - y = 0$$

die Wurzel $y = x_2$ gemeinsam haben, und da $f(y)$ irreduktibel ist, daß auch

$$f(x_1) = 0 \quad \text{und} \quad \theta^{m'}(x_1) - x_1 = 0 \qquad (m' < m)$$

ist. Die letzte Gleichung steht aber im Widerspruch zu (15). Also ist $m' = m$. Im Falle $m > m'$ machen wir ähnliche Schlüsse. Wir erkennen: Ist $m = g \cdot m'$, so kann man die Wurzeln von (1) in g Zeilen einordnen

$$(16) \qquad \begin{array}{l} x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots,\ \theta^{m-1} x_1, \\ x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2,\ \ldots,\ \theta^{m-1} x_2, \\ \\ x_g,\ \theta x_g,\ \theta^2 x_g,\ \ldots,\ \theta^{m-1} x_g, \end{array} \qquad [\theta^m x_\alpha = x_\alpha;\ \alpha = 1, 2, \ldots, g],$$

wobei jede Wurzel von (1) einmal und nur einmal auftritt. Die letzte Behauptung ist noch zu beweisen; das geschieht so: Wäre etwa

$$\theta^{\alpha} x_1 \qquad \theta^{\beta} x_2,$$

so könnte daraus die Relation

$$\theta^{-\beta+\alpha} x_1 = x_2$$

erschlossen werden, d. h. x_2 käme schon unter den Gliedern der Reihe

$$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots,\ \theta^{m-1}$$

vor. Das aber wurde ausgeschlossen, und damit ist die Richtigkeit der Behauptung dargetan.

§ 146. Setzt man nun, der Anordnung (16) der Wurzeln entsprechend,

$$(17)\quad \begin{aligned} (z-x_1)(z-\theta x_1)(z-\theta^2 x_1)\dots(z-\theta^{m-1}x_1) &= \varphi_1(z),\\ (z-x_2)(z-\theta x_2)(z-\theta^2 x_2)\dots(z-\theta^{m-1}x_2) &= \varphi_2(z),\\ &\\ (z-x_g)(z-\theta x_g)(z-\theta^2 x_g)\dots(z-\theta^{m-1}x_g) &= \varphi_g(z), \end{aligned}$$

so sind die g Gleichungen in z

$$\varphi_\alpha(z) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, g)$$

zyklisch, und es wird sein

$$f(x) = \varphi_1(z)\,\varphi_2(z)\dots\varphi_g(z).$$

Auf diese Zerlegung wollen wir näher eingehen.

Es sei y_1 irgendeine ganze symmetrische Funktion von x_1, θx_1, $\theta^2 x_1, \dots, \theta^{m-1}x_1$; dann wird

$$y_1 = \psi(x_1) = \psi(\theta x_1) = \psi(\theta^2 x_1) = \dots = \psi(\theta^{m-1}x_1).$$

Bezeichnet man mit $y_2, y_3, \dots, y_g$ die Werte, die y_1 annimmt, wenn man in y_1 die Wurzel x_1 durch $x_2, x_3, \dots, x_g$ ersetzt, so findet man entsprechend die Relationen

$$y_2 = \psi(x_2) = \psi(\theta x_2) = \psi(\theta^2 x_2) = \dots = \psi(\theta^{m-1}x_2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

und daraus

$$y_1 + y_2 + \dots + y_g = \frac{1}{m}\sum \psi(\theta^\alpha x_\beta) \quad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \dots, m-1\\ \beta = 1, 2, \dots, g\end{pmatrix},$$

wobei die rechte Seite symmetrisch in den Wurzeln von (1), also rational in deren Koeffizienten dargestellt werden kann. In gleicher Weise finden wir für ein beliebiges ganzzahliges λ als Exponenten

$$y_1^\lambda + y_2^\lambda + \dots + y_g^\lambda = \frac{1}{m}\sum \psi^\lambda(\theta^\alpha x_\beta) \quad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \dots, m-1\\ \beta = 1, 2, \dots, g\end{pmatrix}$$

Es sind also die Wurzelpotenzsummen und damit die Koeffizienten der Gleichung

$$(18)\quad (y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_g) \equiv y^g - \alpha_1 y^{g-1} + \dots \pm \alpha_g = 0$$

rational bekannt. Man kann daher jede ganze rationale Funktion von x_1, θx_1, $\theta^2 x_1, \dots, \theta^{m-1}x_1$ mit Hilfe einer Gleichung (18) vom Grade g bestimmen, und weiter dann jede der Größen x_1, θx_1, $\theta^2 x_1, \dots, \theta^{m-1}x_1$ mit Hilfe einer Gleichung (17) vom Grade m.

Die Lösung von (1) des Grades $n = m \cdot g$ ist damit zurückgeführt auf die einer Anzahl von Gleichungen m^{ten} und g^{ten} Grades.

H. N. Abel, von dem diese Untersuchungen stammen, hat das Resultat noch weiter präzisiert. Er zeigt, daß es genügt, eine Gleichung g^{ten} und g Gleichungen m^{ten} Grades zu lösen, um alle Wurzeln von (1) zu bestimmen. Hierauf können wir aber nicht näher eingehen.

§ 147. Ein einfaches Beispiel für die in den letzten Paragraphen besprochenen Verhältnisse liefern die sogenannten reziproken Gleichungen. Wir nennen eine Gleichung $F(x) = 0$ reziprok, wenn mit jeder Wurzel x_1 gleichzeitig ihr reziproker Wert $\frac{1}{x_1}$ eine Wurzel der Gleichung wird.

Im allgemeinen werden die Werte x_1 und $\frac{1}{x_1}$ voneinander verschieden sein; es kann aber auch

$$x_1 = \frac{1}{x_1} \quad \text{für} \quad x_1 = \pm 1$$

die aufgestellte Bedingung befriedigen. Von diesen Wurzeln $+1$ und -1 sehen wir nun zunächst ab; dann kann jeder Wurzel x_1 von $F(x) = 0$ eine von x_1 verschiedene Wurzel x_2 zugeordnet werden, für die $x_1 \cdot x_2 = 1$ ist, oder auch $x_2 = \frac{1}{x_1}$.

Ist nun

$$F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \qquad + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

so wird

$$x^n F\left(\frac{1}{x}\right) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

die gleiche Gleichung sein wie $F(x) = 0$, und daraus fließt durch Vergleichung entsprechender Koeffizienten

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_{n-1}}{a_1} = \frac{a_{n-2}}{a_2} \qquad \frac{a_1}{a_{n-1}}$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Wert dieser Brüche mit ϱ, so ergibt sich

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_0}{a_n} = \varrho = \frac{1}{\varrho}, \quad \varrho^2 = 1, \quad \varrho = \pm 1,$$

und entweder

$$a_n = a_0, \quad a_{n-1} = a_1, \quad a_{n-2} = a_2, \ldots, a_n$$

oder

$$a_n = -a_0, \quad a_{n-1} = -a_1, \quad a_{n-2} = -a_2, \ldots, a_{n-\varkappa} = -a_\varkappa$$

Dementsprechend folgt entweder

$$a_0(x^n + 1) + a_1(x^{n-1} + x) + a_2(x^{n-2} + x^2) + \cdots = 0$$

oder

$$a_0(x^n - 1) + a_1(x^{n-1} - x) + a_2(x^{n-2} - x^2) + \cdots = 0.$$

Die zweite dieser beiden Formen läßt die Wurzel $x = 1$ zu; von dieser Wurzel hatten wir aber die reziproke Gleichung $F = 0$ von vornherein befreit. Es bleibt also nur die erste der beiden Formen zurück. In ihr können wir $n = 2\nu$ setzen, da die Wurzeln in Paaren zu je zwei angeordnet werden können. Dividiert man die entstehende Gleichung durch x^ν, so ergibt sich

$$(19)\qquad a_0\left(x^\nu + \frac{1}{x^\nu}\right) + a_1\left(x^{\nu-1} + \frac{1}{x^{\nu-1}}\right) + a_2\left(x^{\nu-2} + \frac{1}{x^{\nu-2}}\right) + \cdots = 0.$$

Diese Form läßt sich durch eine naheliegende Transformation stark vereinfachen. Wir führen eine neue Unbekannte y ein, die mit x durch

$$(20)\qquad y = x + \frac{1}{x},$$

oder, was dasselbe besagt, durch

$$(20\text{a})\qquad x = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 - 4}\right)$$

verbunden ist. Die Potenzierung von (20) oder die Benutzung der einfach zu beweisenden Rekursionsformel

$$x^{\varrho+1} + \frac{1}{x^{\varrho+1}} = \left(x^\varrho + \frac{1}{x^\varrho}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{\varrho-1} + \frac{1}{x^{\varrho-1}}\right)$$

liefert dann die Reihe der Gleichungen

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2,$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y,$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = y^6 - 6y^4 + 9y^2 - 2,$$

Führt man die Werte der rechten Seiten in (19) ein, so verwandelt sich diese Gleichung vom Grade 2ν in x in eine solche vom Grade ν in y unter Hinzunahme einer quadratischen Gleichung für x.

§ 148. Die im vorigen Paragraphen eingeführte Größe

$$\varrho = \frac{a_n}{a_0} = \frac{a_0}{a_n}$$

hat einen der beiden Werte $+1$, -1.

Die Annahme $\varrho = +1$ ist im voraufgehenden behandelt und erledigt worden; sie liefert die reziproken Gleichungen in der Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0.$$

Die Annahme $\varrho = -1$ läßt sich leicht behandeln; sie führt auf die Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots - a_2 x^2 - a_1 x^1 - a_0 = 0$$

und ergibt die Existenz einer Wurzel $x = 1$.

Dreizehntes Kapitel.

Substitutionengruppen. Funktionengattungen.

§ 149. Die im neunten Kapitel gegebene Behandlung der ein- und der zweiwertigen Funktionen von n unbestimmten Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ führt ungezwungen auf die Frage nach den mehrwertigen Funktionen dieser Größen und läßt schon von vornherein vermuten, daß sie für die Theorie der algebraischen Gleichungen von Nutzen sein werden.

Eine ganze rationale Funktion $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißt ϱ-wertig, wenn die $n!$ Permutationen der Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im ganzen ϱ voneinander verschiedene Werte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$ aus φ_1 hervorrufen. Bezeichnen wir also den Übergang von der natürlichen Anordnung $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu der Permutation $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ durch das Symbol

$$x_{i_1},\ x_{i_2},\ x_{i_3},\ \ldots,\ x_{i_n} \tag{1}$$

und nennen s_i eine Substitution der Elemente x_α, so gibt es Substitutionen, die φ_1 in φ_1, solche, die φ_1 in φ_2, ..., endlich φ_1 in φ_ϱ überführen. Bemerkenswert ist die identische Substitution

$$s_0 = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_n \\ x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

die sich dadurch auszeichnet, daß jedes x_α an seinem Platze bleibt. Wir bezeichnen gelegentlich $s_0 = 1$.

§ 150. Es ist klar, daß die Elemente x_α der oberen Zeile der Substitution (1) beliebig angeordnet werden können, ohne daß die Substitution geändert wird, falls nur unter jedem x_α das x_{i_α} steht, durch das nach (1) das Element x_α zu ersetzen ist. Bilden also h_1, $h_2, h_3, \ldots, h_n$ eine willkürliche Permutation der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, so kann man statt (1) auch schreiben

$$\text{(1a)} \qquad \begin{pmatrix} x_{h_1}, & x_{h_2}, & \ldots, & x_{h_n} \\ x_{i_{h_1}}, & x_{i_{h_2}}, & \ldots, & x_{i_{h_n}} \end{pmatrix}$$

Ist ein x_{i_α} gleich dem in (1) oder (1a) darüber stehenden x_α, läßt also die Permutation das Element x_α an seiner bisherigen Stelle, dann braucht die aus beiden Elementen bestehende Spalte nicht in das Symbol der Substitution aufgenommen zu werden; es ist daher z. B.

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_2, & x_4, & x_3, & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_4 \\ x_2, & x_4, & x_1 \end{pmatrix}$$

Natürlich ist dies aber nur dann angängig, wenn die Elemente der Substitution bereits anderweitig festgelegt sind.

Läßt s_i auf x_a folgen x_b, auf x_b ferner x_c usf., auf x_f weiter x_g und auf x_g endlich wieder x_a (was ja einmal vorkommen muß), so können wir diese Elemente (1a) nach dem soeben Besprochenen so anordnen:

$$\begin{matrix} x_f, & x_g, \\ x_g, & x_a, \end{matrix}$$

Da die angegebenen Elemente $x_a, x_b, \ldots, x_f, x_g$ nicht weiter in s_i vorkommen, so kann man sie von den übrigen abtrennen und sie für sich in eine Klammer schließen

$$\text{(1b)} \qquad \begin{pmatrix} x_a, & x_b, & \ldots, & x_f, & x_g \\ x_b, & x_c, & \ldots, & x_g, & x_a \end{pmatrix}.$$

Man nennt (1b) einen Zyklus und die Anzahl der in ihn eingehenden x seine Ordnung.

Ein Zyklus von der Ordnung 2 ist eine Transposition.

Jede Substitution ist auf mannigfaltige Art in Zyklen zerlegbar. So hat man z. B., wenn man der Bequemlichkeit halber nur die Indizes der x hinschreibt, also statt x_a nur a, die Darstellungen

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 \\ 4, 6, 0, 9, 1, 8, 7, 2, 5, 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 4, 9, 5 \\ 4, 9, 5, 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2, 6, 8 \\ 6, 8, 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3, 0 \\ 0, 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 4, 9, 5 \\ 4, 9, 5, 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, 3 \\ 3, 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6, 8, 2 \\ 8, 2, 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 3 \\ 3, 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8, 2, 6 \\ 2, 6, 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5, 1, 4, 9 \\ 1, 4, 9, 5 \end{pmatrix} = \cdots.$$

§ 151. Wir betrachten nun sämtliche Substitutionen, unter deren Einfluß eine beliebige vorgelegte Funktion $\varphi = \varphi_1$ ungeändert bleibt. Dies seien die Substitutionen

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_r. \tag{3}$$

Bildet man jetzt $(\varphi_{s_\alpha})_{s_\beta}$, d. h. führt man in φ zunächst die zu (3) gehörige Substitution s_α durch und dann in dem hierbei erhaltenen Resultate φ_{s_α} die auch zu (3) gehörige Substitution s_β, so bleibt bei beiden Operationen der Wert der Funktion $\varphi = \varphi_1$ ungeändert. Nun ist die Aufeinanderfolge zweier Substitutionen

$$s_\alpha = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_{\alpha_1}, & x_{\alpha_2}, & \ldots, & x_{\alpha_n} \end{pmatrix}, \quad s_\beta = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, \\ x_{\beta_1}, & x_{\beta_2}, \end{pmatrix} \tag{4}$$

wieder eine Substitution, nämlich die folgende

$$s_\gamma: \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_{\beta_{\alpha_1}}, & x_{\beta_{\alpha_2}}, & \ldots, & x_{\beta_\alpha} \end{pmatrix}$$

die wir als Produkt von s_α und s_β bezeichnen wollen. Wir schreiben das Resultat in der Form

$$s_\gamma = s_\alpha \cdot s_\beta, \tag{5}$$

obwohl diese Bildung einer der wichtigsten Eigenschaften des Produktes gewöhnlicher Zahlen entbehrt, nämlich der, von der Stellung der Faktoren unabhängig zu sein.

Aus dem zu Anfang dieses Paragraphen Gesagten folgt, daß, wenn die beiden Substitutionen s_α und s_β zu den unter (3) gegebenen gehören, die $\varphi_1 = \varphi$ nicht ändern, auch ihr Produkt unter (3) vorkommt.

Wir nennen jeden Komplex von Substitutionen eine Substitutionengruppe, wenn er das Produkt je zweier in ihm auftretenden Substitutionen enthält. Dabei können die beiden Faktoren auch einander gleich sein.

Wir wollen s_α bzw. s_β aus (4) kürzer durch bloße Indizesangabe bezeichnen und schreiben demnach

$$s_\alpha = \begin{pmatrix} \ldots i \ldots \\ \ldots \alpha_i \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, \quad s_\beta = \begin{pmatrix} \ldots i \ldots \\ \ldots i_\beta \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \beta_i \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Für die identische Substitution s_0 aus (2) setzen wir, wie schon angegeben, das Symbol

$$s_0 = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = 1, \tag{7}$$

was angeht, da man für jedes s_α die Gleichung $s_\alpha s_0 = s_0 s_\alpha$ hat.

Es gilt nun für Substitutionen der Satz: Ist die Gleichung

$$s_\alpha s_\gamma = s_\beta s_\gamma$$

erfüllt, so folgt daraus die Gleichung

$$s_\alpha = s_\beta.$$

Ist nämlich

$$s_\alpha = \begin{pmatrix} \ldots i \ldots \\ \ldots \alpha_i \ldots \end{pmatrix}, \quad s_\beta = \begin{pmatrix} \ldots i \ldots \\ \ldots \beta_i \ldots \end{pmatrix}, \quad s_\gamma = \begin{pmatrix} \ldots i \ldots \\ \ldots \gamma_i \ldots \end{pmatrix}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

so folgt

$$s_\alpha s_\gamma = \begin{pmatrix} \ldots i \ldots \\ \ldots \gamma_{\alpha_i} \ldots \end{pmatrix}, \quad s_\beta s_\gamma = \begin{pmatrix} \ldots i \ldots \\ \ldots \gamma_{\beta_i} \ldots \end{pmatrix}$$

und wegen der vorausgesetzten Gleichheit von $s_\alpha s_\gamma$ und $s_\beta s_\gamma$ ergibt sich der Reihe nach

$$\gamma_{\alpha_i} = \gamma_{\beta_i}, \quad \alpha_i = \beta_i \quad \text{und} \quad s_\alpha = s_\beta,$$

wie behauptet war.

In gleicher Weise erkennt man: Ist die Gleichung

$$s_\gamma s_\alpha = s_\gamma s_\beta$$

erfüllt, so folgt daraus

$$s_\alpha = s_\beta.$$

Weiter ergibt sich: Bedeuten die Symbole

$$(8) \qquad s_\alpha, s_\beta, s_\gamma, \ldots, s_\tau$$

voneinander verschiedene Substitutionen, und bedeutet s_ω eine beliebige Substitution, so sind auch die Substitutionen

$$(9) \qquad s_\alpha s_\omega, s_\beta s_\omega, s_\gamma s_\omega, \ldots, s_\tau s_\omega$$

untereinander verschieden. — Wenn insbesondere die Substitutionen (8) die Elemente einer Gruppe sind, der auch s_ω angehört, dann sind die Substitutionen (9) bis auf die Reihenfolge mit denen aus (8) die gleichen.

Wir haben für die Aufeinanderfolge zweier Substitutionen die Bezeichnung „Produkt" eingeführt; es fragt sich, inwieweit die gewöhnlichen Multiplikationsregeln (das kommutative, das distributive und das assoziative Gesetz) hier noch gültig sind.

Das kommutative Gesetz der gewöhnlichen Produktbildung

$$ab = ba$$

gilt hier im allgemeinen nicht mehr, wenn a und b beliebige Substitutionen bedeuten. Das wurde bereits erwähnt; als Beispiel gelte

noch folgendes, wobei die x_α wieder durch ihre Indizes α ersetzt sind. Es ist:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix},$$

dagegen wird

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix};$$

also können verschiedene Anordnungen der gleichen Faktoren auf verschiedene Produkte führen.

Dagegen gilt bei der Multiplikation von Substitutionen das assoziative Gesetz, d. h. es ist

$$(s_\alpha s_\beta)s_\gamma = s_\alpha(s_\beta s_\gamma).$$

In der Tat wird, wenn man die drei Substitutionen in der Form

$$s_\alpha=\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots\end{pmatrix},\quad s_\beta=\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots\\ \beta_1, & \beta_2, & \dots\end{pmatrix},\quad s_\gamma=\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots\\ \gamma_1, & \gamma_2, & \dots\end{pmatrix}$$

ansetzt, zunächst

$$s_\alpha s_\beta=\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots\\ \beta_{\alpha_1}, & \beta_{\alpha_2}, & \dots\end{pmatrix},\quad s_\beta s_\gamma=\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots\\ \gamma_{\beta_1}, & \gamma_{\beta_2}, & \dots\end{pmatrix},$$

und dann weiter

$$(s_\alpha s_\beta)s_\gamma=\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots\\ \gamma_{\beta_{\alpha_1}}, & \gamma_{\beta_{\alpha_2}}, & \dots\end{pmatrix},$$

$$s_\alpha(s_\beta s_\gamma)=\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots\\ \gamma_{\beta_{\alpha_1}}, & \gamma_{\beta_{\alpha_2}}, & \dots\end{pmatrix},$$

so daß dadurch das assoziative Gesetz bewiesen ist.

Auf Grund dieses Gesetzes kann man die Potenzen von Substitutionen definieren:

$$s_\alpha s_\alpha = s_\alpha^2;\quad s_\alpha s_\alpha s_\alpha = (s_\alpha s_\alpha)s_\alpha = s_\alpha^2\cdot s_\alpha = s_\alpha(s_\alpha s_\alpha) = s_\alpha\cdot s_\alpha^2;$$
$$s_\alpha^3 = s_\alpha^2 s_\alpha = s_\alpha s_\alpha^2 = s_\alpha s_\alpha s_\alpha.$$

Da es nur $n!$ Permutationen unter n verschiedenen Größen gibt und demnach ebenso viele Substitutionen, so muß es in der Reihe der Potenzen jeder Substitution

$$s_\alpha,\ s_\alpha^2,\ s_\alpha^3,\ s_\alpha^4,\ s_\alpha^5,$$

einander gleiche Potenzen geben. Aus der Annahme solcher Gleichheit

$$s_\alpha^\mu = s_\alpha^\nu \qquad (\nu > \mu)$$

ergibt sich unter Benutzung der identischen Substitution (2)

$$s_0 \cdot s_\alpha^\mu = s_\alpha^{\nu-\mu} \cdot s_\alpha^\mu,$$
$$s_\alpha^{\nu-\mu} = s_0 = 1;$$

d. h. unter den Potenzen jeder Substitution s_α kommt die identische Substitution $s_0 = 1$ vor.

Ist τ der niedrigste Exponent > 0, für den $s^\tau = 1$ wird, so heißt τ die Ordnung von s. Dies stimmt mit der Definition der Ordnung eines Zyklus überein.

Für das distributive Gesetz gibt es hier natürlich keine Statt.

§ 152. Alle Potenzen, deren Exponent $< \tau$ ist, d. h. alle Glieder

$$s^0 = 1,\ s^1,\ s^2,\ s^3,\ \ldots,\ s^{\tau-1}$$

sind untereinander verschieden. Denn aus einer Gleichung von der Form

$$s^\mu = s^\nu \qquad (\mu < \nu < \tau)$$

würde, wie oben, folgen

$$s^{\nu-\mu} = 1 \qquad (\nu - \mu < \tau),$$

was der Annahme über τ widersprechen würde.

Wir können jetzt auch Potenzen von Substitutionen mit negativen Exponenten definieren. Das geschieht durch die Gleichungen

$$s^{-1} = s^{\tau-1},\quad s^{-2} = s^{\tau-2},\quad s^{-3} = s^{\tau-3},\ \ldots.$$

Da sich hieraus ergibt

$$s^\mu s^{-\mu} = s^{-\mu} s^\mu = 1,$$

so dürfen wir definieren: $s^{-\mu}$ ist die Reziproke von s^μ, und wenn

$$s_\alpha = \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots \\ \cdots & \alpha_i & \cdots \end{pmatrix} \text{ ist, dann folgt } s_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cdots & \alpha_i & \cdots \\ \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}.$$

Enthält eine Substitutionengruppe die Substitution s, so alle Potenzen von s und insbesondere die identische Substitution s_0.

§ 153. Nachdem wir uns so über die Substitutionen vorläufig orientiert haben, kehren wir zu den Betrachtungen von § 149 zurück. Wir zeigten dort, daß jeder ganzen Funktion $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n unbestimmten Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Substitutionengruppe dieser x zugehört, die dadurch charakterisiert ist, daß sie alle und nur die Substitutionen umfaßt, deren Anwendung auf φ diese Funktion ungeändert läßt. Wir wollen nun auch umgekehrt nachweisen, daß jeder Substitutionengruppe eine, ja unendlich viele Funktionen der angegebenen Eigenschaft zugehören.

Zunächst betrachten wir eine Funktion ψ von der Form eines Monoms

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\delta,$$

bei der die Exponenten $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ fest und alle untereinander verschieden sein sollen. Dann hat ψ bei den $n!$ Substitutionen der x untereinander lauter verschiedene Werte. Wir bezeichnen mit

$$\psi_{s_i} = \psi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\varkappa})$$

den Wert, der aus ψ durch Verwendung von s_i hervorgeht. Sind nun

$$(10) \qquad s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{r-1}$$

die Substitutionen einer Gruppe, die wir mit G bezeichnen, dann bilden wir die Summe

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_{s_0} + \psi_{s_1} + \cdots + \psi_{s_{r-1}}$$

und behaupten, daß Φ zur Gruppe G gehört, mit anderen Worten: daß Φ für alle Substitutionen (10) ungeändert bleibt und auch nur für sie. Ist nämlich s_α eine Substitution von (10), so gibt ihre Anwendung auf Φ das Resultat

$$\Phi_{s_\alpha} = \psi_{s_1 s_\alpha} + \psi_{s_2 s_\alpha} + \psi_{s_3 s_\alpha} + \cdots + \psi_{s_r s_\alpha};$$

und nach § 151, (9) ist dies gleich Φ; damit wäre der erste Teil der Behauptung begründet.

Ist dagegen σ eine Substitution der x, die nicht unter (10) vorkommt, so sind die r Substitutionen

$$s_0\sigma, s_1\sigma, s_2\sigma, \ldots, s_{r-1}\sigma,$$

wie leicht zu sehen, voneinander und ebenso von den Substitutionen (10) verschieden. Das Entsprechende gilt von den Funktionen

$$\psi_\sigma, \psi_{s_1\sigma}, \psi_{s_2\sigma}, \ldots, \psi_{s_{r-1}\sigma},$$

untereinander, so daß Φ und Φ_σ keinen Summanden gemein haben, also verschieden sind: $\Phi_\sigma \neq \Phi$.

Wir haben hiermit eine Regel gegeben, durch die beliebig viele Funktionen bestimmt werden können, die zu der Gruppe G von r Substitutionen gehören. Wir wollen alle Funktionen dieser Eigenschaft einer und derselben F u n k t i o n e n g a t t u n g zuerteilen; diese ist durch die Gruppe als ihre „Invariante" eindeutig bestimmt. Die zu einer Gattung gehörigen Funktionen sind, wie bald gezeigt werden soll, durch wichtige algebraische Eigenschaften miteinander verbunden.

§ 154. Es sei wieder $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine mehrwertige Funktion der x_α; sie gehöre zur Gattung G mit den r Substitutionen (10); σ_2 sei eine nicht in G enthaltene Substitution der x_α, also $\varphi_\sigma \neq \varphi$. Wir betrachten die Reihe von Substitutionen

$$(11) \qquad s_0\sigma_2, s_1\sigma_2, s_2\sigma_2, \ldots, s_{r-1}\sigma_2.$$

Auf φ angewendet, ergeben sie sämtlich

$$\varphi_{s_\alpha \sigma_2} = (\varphi_{s_\alpha})_{\sigma_2} = \varphi_{\sigma_2},$$

d. h. sie wandeln sämtlich den Funktionalwert φ_1 in φ_{σ_2} um.

Wenn umgekehrt für eine Substitution τ

$$\varphi_\tau = \varphi_{\sigma_2}, \quad \text{also} \quad \varphi_{\tau \sigma_2^{-1}} = \varphi$$

ist, so gehört $\tau \sigma_2^{-1}$ zu dem Komplexe (10), da es die Funktion φ nicht ändert. Folglich gibt es in (10) ein s_α, für das

$$\tau \sigma_2^{-} \qquad \text{also}$$

wird. Demnach enthält (11) alle Substitutionen, die den Funktionalwert φ in φ_{σ_2} überführen.

Endlich sind alle Glieder von (11) untereinander verschieden, da aus einer Gleichung von der Form

$$s_\alpha \sigma_2 = s_\beta \sigma_2 \quad \text{folgen würde} \quad s_\alpha = s_\beta.$$

Daher liefern (10) und (11) zusammen $2r$ untereinander verschiedene Substitutionen.

Ist $2r < n!$, so gibt es außer den $2r$ noch eine neue Substitution, die wir mit σ_3 bezeichnen wollen; mit der Reihe

(11a) $$s_0 \sigma_3, \; s_1 \sigma_3, \; \ldots, \; s_{r-1} \sigma_3$$

stellen wir dieselben Betrachtungen an wie soeben mit (11) und sehen dabei, daß (11a) alle und nur die Substitutionen enthält, die φ in φ_{σ_3} umwandeln.

So geht es weiter, bis alle $n!$ Substitutionen untergebracht sind; die Schlußreihe lautet dabei

(11b) $$s_0 \sigma_\varrho, \; s_1 \sigma_\varrho, \; \ldots, \; s_{r-1} \sigma_\varrho.$$

Dabei folgt $r\varrho = n!$ Benennt man die Anzahl der Substitutionen einer Gruppe ihre Ordnung, so gilt: Das Produkt aus der Werteanzahl einer Funktion in die Ordnung ihrer Gruppe ist $n!$. Es bestehen daher z. B. für $n = 4$ nur die Möglichkeiten $r = 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24$ für die Werteanzahl einer Funktion von vier Variabeln.

§ 155. Die Überlegungen und Schlüsse des vorigen Paragraphen lassen sich leicht verallgemeinern. Die zur Funktion $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gehörige Gruppe G bestehe aus den Substitutionen

(10) $$s_0, \; s_1, \; \ldots, \; s_{r-1}.$$

Weiter sei eine Funktion $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit der zugehörigen Gruppe H gegeben, die neben anderen noch alle Substitutionen (10)

enthält. Es sei ferner σ_2 eine nicht in G enthaltene Substitution von H. Wir bilden mit ihr den Komplex

$$s_0\sigma_2,\ s_1\sigma_2,\ \ldots,\ s_{r-1}\sigma_2 \tag{11}$$

und führen mit ihm die oben angestellten Schlüsse durch. So stößt man auf den Satz: Kommen alle Substitutionen einer Gruppe G der Ordnung r unter den Substitutionen einer Gruppe H der Ordnung r_0 vor, so ist r_0 ein Vielfaches von r.

Oder auch: Bleibt eine ϱ_0-wertige Funktion $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für alle Substitutionen ungeändert, die die ϱ-wertige Funktion $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nicht ändern, dann ist ϱ ein Vielfaches von ϱ_0.

Nimmt man H als symmetrische Gruppe, demnach $r_0 = n!$, so kommt man auf die entsprechenden Sätze des vorigen Paragraphen zurück.

Eine Gruppe G, deren Substitutionen sämtlich in der Gruppe H enthalten sind, heißt eine Untergruppe oder ein Teiler von H. Die Gattung, der die Funktion $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ angehört, steht unter der Gattung, der die Funktion $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ angehört.

Die symmetrische Gattung steht unter jeder anderen Gattung.

§ 156. Nun sei $\varphi_2 = \varphi_{\sigma_2}$ einer der Werte, die φ annehmen kann. Wir fragen nach der zu φ_2 gehörigen Gruppe, d. h. nach dem Inbegriffe der Substitutionen, die, auf φ_2 angewendet, keine Wertänderung dieser Funktion hervorrufen.

Ist τ eine von diesen Substitutionen, d. h. ist $\varphi_{\sigma_\alpha \tau} = \varphi_{\sigma_\alpha}$, so folgt

$$\varphi = \varphi_{\sigma_\alpha \sigma_\alpha^{-1}} = \varphi_{\sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1}}, \quad \text{also} \quad \sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1} = s_\beta,$$

da ja $\sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1}$ zu der Gruppe G gehört. Die letzte Gleichung liefert weiter

$$\tau = \sigma_\alpha^{-1} s_\beta \sigma_\alpha,$$

wo s_β alle Substitutionen von G durchlaufen kann (10).

Umgekehrt ist leicht zu sehen, daß, wenn s_α irgendeine Substitution von G ist, dann die Substitution $\tau = \sigma_2^{-1} s_\alpha \sigma_2$ den Wert φ_2 nicht ändert. Demnach bilden die r Substitutionen

$$\sigma_2^{-1} s_0 \sigma_2 = 1,\quad \sigma_2^{-1} s_1 \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_2^{-1} s_\alpha \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_2^{-1} s_{r-1} \sigma_2$$

die zu φ_2 gehörige Gruppe. Wir bezeichnen sie symbolisch durch

$$G_2 = G_{\sigma_2} = \sigma_2^{-1} G \sigma_2.$$

Die Grundforderung für die Gruppeneigenschaft eines Systems von Substitutionen ist im vorliegenden Falle wegen des assoziativen Gesetzes

$$(\sigma_2^{-1} s_\alpha \sigma_2)(\sigma_2^{-1} s_\beta \sigma_2) = \sigma_2^{-1} s_\alpha (\sigma_2 \cdot \sigma_2^{-1}) s_\beta \sigma_2 = \sigma_2^{-1} (s_\alpha s_\beta) \sigma_2 = \sigma_2^{-1} s_\gamma \sigma_2.$$

Sie ist hier befriedigt, da stets $s_\alpha s_\beta$ gleich einem s_γ gesetzt werden kann, wo s_α, s_β, s_γ zu G gehören.

Die Werte

$$G, \; \sigma_2^{-1} G \sigma_2, \; \sigma_3^{-1} G \sigma_3, \; \ldots, \; \sigma_\varrho^{-1} G \sigma_\varrho$$

nennen wir die zu G konjugen Werte und die Gesamtheit der je r Substitutionen von (11), (11a), ... die zur Gruppe G konjugen Komplexe. $\sigma^{-1} G \sigma$ heißt die Transformierte von G durch σ.

§ **157.** Wir haben im vorigen Kapitel symmetrische oder einwertige und zweiwertige Funktionen von beliebiger Variablenanzahl n kennen gelernt und untersucht, also solche, bei denen $\varrho = 1$, $r = n!$, und solche, bei denen $\varrho = 2$, $r = \frac{1}{2} n!$ ist. Wir wollen die beiden hierdurch bestimmten Funktionengattungen von den neuen, jetzt gewonnenen Gesichtspunkten aus nochmals untersuchen.

Die zu der symmetrischen Gattung gehörige Gruppe, d. h. die symmetrische Gruppe besteht aus sämtlichen $n!$ Substitutionen der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Enthält eine Gruppe G von n Elementen die $(n-1)$ Transpositionen mit einer gemeinsamen Variablen, etwa

$$(x_1 x_2), \; (x_1 x_3), \; \ldots, \; (x_1 x_n),$$

so ist G die symmetrische Gruppe. Denn zunächst enthält G die Produkte

$$(x_1 x_2)(x_1 x_3)(x_1 x_2) = (x_2 x_3),$$

d. h. sämtliche Transpositionen der n vorgelegten Elemente.

Zweitens läßt sich jeder Zyklus durch Aufeinanderfolge von Transpositionen darstellen. Denn man hat beispielsweise für einen Zyklus von fünf Elementen

$$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = (x_1 x_2)(x_1 x_3)(x_1 x_4)(x_1 x_5),$$

und ähnlich im allgemeinen Falle.

Drittens ist jede Substitution in Transpositionen zerlegbar.

Daher gilt der ausgesprochene Satz in vollem Umfange.

§ **158.** Die allgemeine Form der zweiwertigen Funktionen ist nach früheren Untersuchungen

$$S_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + S_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \sqrt{\Delta}.$$

Hierin bedeuten S_1 und S_2 zwei beliebige ganze symmetrische Funktionen; weiter ist

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \ldots (x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \ldots (x_2 - x_n) \\ (x_3 - x_4) \ldots (x_3 - x_n) \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ (x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

die Quadratwurzel aus der Diskriminante der n Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die gesuchte Gruppe ist dann offenbar identisch mit der zu $\sqrt{\Delta}$ gehörenden Gruppe. Nun haben wir oben bereits bewiesen, daß der Wert von $\sqrt{\Delta}$ für jede Transposition $(x_\alpha x_\beta)$ in den entgegengesetzt gleichen, d. h. in $(-\sqrt{\Delta})$ übergeht. Die Gruppe von $\sqrt{\Delta}$ soll deswegen die alternierende Gruppe heißen. Diese besteht aus allen Substitutionen, die durch eine gerade Anzahl aufeinander folgender Transpositionen darstellbar sind. Daraus ergibt sich zugleich, daß jede solche Darstellung einer Substitution s durch Transpositionen (die auf unendlich viele Arten möglich ist) entweder stets eine gerade oder stets eine ungerade Anzahl von Transpositionen erfordert, und zwar tritt das erstere oder das zweite ein, je nachdem die Substitution s die Funktion $\sqrt{\Delta}$ ungeändert läßt oder sie ändert.

Wir betrachten als Beispiel das Folgende: Man hat die Gleichung

$$(x_\alpha x_\beta)(x_\alpha x_\gamma) = (x_\alpha x_\beta x_\gamma)$$

und ersieht daraus, daß die alternierende Gruppe alle Zyklen dritter Ordnung enthält. Umgekehrt, da die Gleichungen gelten

$$(x_\alpha x_\beta x_\gamma)(x_\alpha x_\delta x_\gamma) = (x_\alpha x_\beta)(x_\gamma x_\delta), \quad (x_\alpha x_\beta x_\gamma) = (x_\alpha x_\beta)(x_\alpha x_\gamma),$$

so lassen sich alle Produkte von 2, also von 4, von 6, ... Transpositionen aus den Zyklen von je drei Elementen zusammensetzen. Daraus ersieht man, daß eine Gruppe, die alle Zyklen von drei Elementen enthält, auch die alternierende Gruppe in sich schließt. Der Komplex aller Zyklen dritter Ordnung läßt sich durch den einfacheren der $(n-2)$ Zyklen dritter Ordnung mit festen Elementen, etwa x_1 und x_2, von der Form

$$(x_1 x_2 x_3),\ (x_1 x_2 x_4),\ (x_1 x_2 x_5),\ \ldots,\ (x_1 x_2 x_n)$$

ersetzen. Das erkennt man aus der Relation

$$(x_\alpha x_\beta x_\gamma) = (x_1 x_2 x_\beta)^2 (x_1 x_2 x_\gamma)(x_1 x_2 x_\alpha)^2 (x_1 x_2 x_\beta),$$

die den allgemeinen Zyklus dritter Ordnung durch die besonderen $(x_1 x_2 x_\varkappa)$ ausdrückt.

Somit ist bewiesen: Enthält eine Gruppe G von n Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die $(n-2)$ zyklischen Substitutionen

$$(x_1 x_2 x_\alpha) \qquad (\alpha = 3, 4, 5, \ldots, n-2),$$

so enthält G auch die alternierende Gruppe, d. h. sie ist selbst alternierend oder symmetrisch.

In ähnlicher Weise kann der folgende Satz bewiesen werden:

Enthält eine Gruppe G alle zyklischen Substitutionen m^{ter} Ordnung, wobei m eine ungerade Zahl bedeutet, so ent-

hält die Gruppe G auch die alternierende oder die symmetrische Gruppe.

Da die beiden Werte einer alternierenden Funktion $+\sqrt{\Delta}$ und $-\sqrt{\Delta}$ sich nur durch ihre Vorzeichen unterscheiden, so gehören beide zu der gleichen Substitutionengruppe. Es gibt also Substitutionen der x_α, die beiden Gruppen, der von $+\sqrt{\Delta}$ und der von $-\sqrt{\Delta}$, angehören, ja die Gruppe von $+\sqrt{\Delta}$ fällt mit der von $-\sqrt{\Delta}$ zusammen.

§ 159. Gehört nun eine Funktion von ϱ Werten

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1$$

zur Gruppe G, so gehören die konjugen Werte von f_1, die wir mit

$$f_1, f_2, \ldots, f_\varrho$$

bezeichnen, zu den Gruppen

$$G, \sigma_2^{-1} G \sigma_2, \sigma_3^{-1} G \sigma_3, \ldots, \sigma_\varrho^{-1} G \sigma_\varrho,$$

die durch Transformation mit $1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\varrho$ aus G entstehen. Gibt es nun außer der in allen diesen Gruppen vorkommenden Einheitssubstitution 1 noch andere Substitutionen, die gleichfalls zu allen Transformierten von G gehören?

Die Gesamtheit aller vorhandenen derartigen Substitutionen bildet jedenfalls eine Gruppe H, da mit s' und s'' auch $s's''$ allen Gruppen $\sigma_\alpha^{-1} G \sigma_\alpha$ angehört. Es ist für H charakteristisch, durch jede Substitution der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in sich selbst transformiert zu werden. Denn die Gesamtheit der Gruppen

$$G, \sigma_2^{-1} G \sigma_2, \sigma_3^{-1} G \sigma_3, \ldots, \sigma_\varrho^{-1} G \sigma_\varrho$$

stellt alle Transformierten von G dar und bleibt daher ungeändert, wenn sie durch irgendeine Substitution der x transformiert wird; und dies muß mit der Gruppe H gleichfalls stattfinden.

Die oben aufgeworfene Frage ist also in die umgewandelt, ob es eine Gruppe gibt, die allen ihren konjugen Gruppen gleich ist. H sei eine solche Gruppe. Enthält H irgendeine Substitution t, so enthält es auch alle Substitutionen, die t ähnlich sind; denn diese lassen sich ja aus t durch eine Transformation herleiten.

Wir betrachten zunächst die Substitutionen von H, die nächst der Einheit möglichst wenige Elemente x_α umsetzen. Da H durch jede Transposition der x_α in sich selbst transponiert wird, so gilt das gleiche auch von dem Komplexe H_0 von möglichst wenigen Elementen, d. h. H_0 enthält alle untereinander ähnliche, wenn es eine derselben enthält. Keine von ihnen kann aus einem Zyklus von mehr als drei Elementen bestehen, oder allgemeiner, keine derselben kann einen

solchen Zyklus von mehr als drei Elementen enthalten. Denn wäre etwa eine Substitution mit mehr als drei Elementen

$$s_1 = (x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots) \ldots$$

in H_0 enthalten, so käme auch für $\sigma = (x_1 x_2 x_3)$ die Transformierte

$$\sigma^{-1} s_1 \sigma = (x_2 x_3 x_1 x_4 \cdots) \cdots = s_2,$$

sowie

$$s_1 s_2^{-1} = (x_2)(x_3 x_1 \ldots) \ldots .$$

in H_0 vor. Dieses Produkt hätte, ohne gleich 1 zu werden, sicher weniger Elemente als s_1, was der Annahme widerspricht, daß s_1 möglichst wenige Elemente in sich fasse; denn x_2 ist ja beseitigt, ohne daß ein neues Element eingetreten wäre.

Ebensowenig kann eine Substitution von mehr als drei Elementen auftreten, in der ein Zyklus dritter Ordnung vorkommt. Denn aus

$$s_1 = (x_1 x_2 x_3)(x_4 \cdots) \cdots \quad \text{und} \quad \sigma^{-1} s_1 \sigma = (x_1 x_3 x_4)(x_2 \cdots) \cdots = s_2$$

für $\sigma = (x_2 x_3 x_4)$ folgt durch Multiplikation, ähnlich wie soeben, daß in H auch das Produkt

$$s_1 s_2 = (x_3)(x_2 x_4 \ldots) \ldots$$

enthalten ist, also eine Substitution, die entgegen der Annahme weniger Elemente hat als s_1. Kommt daher überhaupt ein Zyklus dritter Ordnung in einer der Substitutionen vor, die wir betrachten, so macht dieser schon allein für sich die Substitution aus. H enthält dann alle Transformierte dieses einen Zyklus dritter Ordnung und deswegen (§ 158, S. 193) die alternierende Gruppe.

Es ist noch der Fall zu betrachten, daß jede Substitution von H_0 lediglich aus Zyklen zweiter Ordnung besteht. Ist die Anzahl der Elemente x_α, die $= n$ gesetzt werde, größer als 4, so folgt aus dem Auftreten der beiden Substitutionen

$$s_1 = (x_1 x_2)(x_3 x_4) \cdots, \quad \sigma^{-1} s_1 \sigma = (x_1 x_2)(x_4 x_5) \cdots = s_2$$

bei $\sigma = (x_3 x_4 x_5)$ die Existenz von

$$s_1 s_2 = (x_1)(x_2)(x_3 x_5 \ldots) \ldots$$

in H; und diese Substitution hätte, ohne gleich 1 zu sein, weniger als n Elemente. Das führt auf einen Widerspruch. Es wäre also nur möglich, daß die gesuchten Substitutionen sich als Transpositionen ausweisen; dann aber ist H nach früheren Untersuchungen die symmetrische Gruppe.

Ist dagegen $n = 4$, so gibt es für diesen Fall wirklich eine solche Gruppe, nämlich die aus den vier Substitutionen

$$(12) \qquad 1,\ (x_1 x_2)(x_3 x_4),\ (x_1 x_3)(x_2 x_4),\ (x_1 x_4)(x_2 x_3)$$

gebildete, die sich bei jeder Transposition reproduziert. Als eine zu ihr gehörige Funktion führen wir die sechswertige Funktion

$$(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)$$

ein. Wir haben somit folgendes Resultat erlangt: Außer der symmetrischen und der alternierenden Gruppe von beliebig vielen Elementen gibt es allein die Gruppe (12) von vier Elementen, die bei der Transformation mit jeder beliebigen Substitution ihrer Elemente ungeändert bleibt.

§ 160. Aus den im § 158, S. 194 hergeleiteten Resultaten folgen wichtige Sätze. Wir wissen, daß das Quadrat jeder alternierenden Funktion einwertig ist; wir fragen, ob es außer diesen noch andere mehrwertige Funktionen gibt, von denen eine Potenz einwertig wird.

Bezeichnen wir mit ν den Exponenten dieser Potenz und mit φ die mehrwertige Funktion, so ist $\varphi^\nu = S$ eine symmetrische, also einwertige Funktion. Aus dieser Gleichung folgen die Werte

$$\varphi_\varkappa = \omega^\varkappa \sqrt[\nu]{S} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

wobei ω eine primitive ν^{te} Einheitswurzel bedeutet. Die konjugen Werte von φ sind demnach untereinander nur durch konstante Faktoren ω^α verschieden und gehören deshalb zu der gleichen Substitutionengruppe. Damit kommt man auf den im vorigen Paragraphen behandelten Fall zurück.

Außer den einwertigen und den zweiwertigen Funktionen von beliebig vielen Variablen können daher höchstens noch Funktionen von vier Variablen in Frage kommen, die zur Gruppe (12) gehören:

$$1,\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3).$$

Um diese noch offene Frage zu erledigen, gehen wir auf den Satz § 159, S. 195 zurück und geben für ihn einen zweiten Beweis, der mit den einfachsten Hilfsmitteln auskommt und gleichzeitig die Beweismethode für eine wichtige Ergänzung des Satzes liefert. Der Satz lautet folgendermaßen: Außer den alternierenden gibt es keine mehrwertigen Funktionen, von denen eine Potenz einwertig wird. Zuerst kann man den Exponenten ϱ der Potenz als Primzahl daher voraussetzen. Denn aus $\varrho = p \cdot q$ würde

$$\text{für} \quad \varphi^\varrho = S \quad \text{folgen} \quad (\varphi^p)^q = S,$$

so daß es auch eine Funktion φ^p gibt, von der schon die q^{te} Potenz symmetrisch ist. Nun ist q ein beliebiger Teiler von ϱ und kann als Primzahl angenommen werden.

Sei also jetzt φ eine nicht symmetrische Funktion, deren q^{te} Potenz symmetrisch wird, wo q eine Primzahl bedeutet, so enthält die

zu φ gehörige Gruppe nach § 158, S. 193 nicht alle Transpositionen der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von φ. Es möge

$$t = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta \\ x_\beta & x_\alpha \end{pmatrix} = (x_\alpha x_\beta)$$

eine dieser, nicht in der Gruppe von φ vorkommenden Transpositionen sein; sie möge den Wert von $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi$ in φ_t verwandeln, wo $\varphi_t \neq \varphi$ ist. Da

$$\varphi^q = \varphi_t^q = S$$

symmetrisch, also einwertig ist, so folgt aus dieser Gleichung

$$\varphi_t = \omega \cdot \varphi,$$

wo ω eine der $(q-1)$ primitiven q^{ten} Einheitswurzeln bedeutet. Wendet man die Transposition t auf die letzte Gleichung an und bedenkt, daß $t^2 = 1$ ist, so ergibt sich

$$\varphi = \varphi_{t^2} = \omega \cdot \varphi_t = \omega^2 \cdot \varphi, \quad \omega^2 = 1,$$

d. h. der Exponent q ist $= 2$. Also werden wir auf den bereits früher erledigten Fall der zweiwertigen Funktionen zurückgeführt (§ 158, S. 193), der uns als Lösung die alternierenden Funktionen sämtlich und zugleich ausschließlich liefert.

§ 161. Im Anschluß an dieses Resultat würde es sich jetzt darum handeln, zu untersuchen, ob es Funktionen gibt, die — selbst mehr als zweiwertig —, in eine gewisse Primzahlpotenz erhoben, zweiwertig werden.

Die Funktion $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi$ sei mehr als zweiwertig; ψ^q sei zweiwertig; q sei eine Primzahl. Dann gibt es eine Zirkularsubstitution dritter Ordnung, die nicht in der Gruppe von ψ vorkommt; denn diese kann ja nicht alle derartigen zirkularen Substitutionen enthalten, ohne die alternierende Gruppe zu umfassen (§ 159, S. 195). Es sei σ diese zyklische Substitution dritter Ordnung, und ψ_σ der Wert, den ψ unter der Einwirkung von σ annimmt, so daß

$$\psi_\sigma \neq \psi \quad \text{und} \quad \psi^q = S_1 + S_2\sqrt{\Delta}$$

wird. Diese Gleichung folgt aus dem Umstande, daß σ als zyklische Substitution dritter Ordnung zur Gruppe der zweiwertigen Funktion auf der rechten Seite der letzten Gleichung gehört. Zieht man die q^{te} Wurzel aus, so folgt

$$\psi_\sigma = \varpi \psi_1,$$

wobei ϖ eine primitive q^{te} Einheitswurzel bedeutet. Wendet man auf

diese für ψ_σ erhaltene Gleichung die Substitutionen σ und σ^2 an, und bedenkt, daß $\sigma^3 = 1$, also $\psi_{\sigma^3} = \psi_1$ ist, so erhält man

$$\psi_{\sigma^2} = \varpi\,\psi_\sigma = \varpi^2\psi_1,$$
$$\psi_{\sigma^3} = \varpi^2\psi_\sigma = \varpi^3\psi_1,$$
$$\psi_1 = \varpi^3\psi_1$$

und daraus dann

$$\varpi^3 = 1, \quad q = 3.$$

Wenn wir die Anzahl n der Elemente x_α größer als 4 voraussetzen, dann kommen in der Gruppe von ψ auch nicht alle zyklischen Substitutionen fünfter Ordnung vor (§ 158, Schluß); ist τ eine der hierbei nicht vorkommenden, so wird $\psi_\tau \neq \psi$ und

$$\psi_\tau^q = \psi^q = S_1 + S_2\sqrt{\Delta},$$

wie soeben, daher

$$\psi_\tau = \varpi\psi,$$

wobei ϖ eine primitive q^{te} Einheitswurzel ist. Genau wie oben folgt daraus, weil $\tau = 1$ ist, daß

$$\varpi^5 = 1 \quad \text{und} \quad q = 5$$

sein muß. Das widerspricht dem ersten Resultate, nach dem $q = 3$ ist. Also kann n nicht größer als 4 sein. Ist $n > 4$, so gibt es keine Funktion von $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, die mehr als zwei Werte besitzt, und von der eine Potenz zweiwertig wird.

§ 162. Für $n = 3$ und $n = 4$ gibt es nun wirklich „Ausnahmefunktionen". Wir wollen die einfachsten unter ihnen anführen, ohne auf ihre Herleitung näher einzugehen, was uns zu weit führen würde.

Es sei ω eine primitive dritte Einheitswurzel, also

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

dann ist für $n = 3$ eine Funktion der x_1, x_2, x_3, nämlich

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^1 x_3$$

sechswertig, und ihre dritte Potenz wird zweiwertig,

$$\varphi^3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\left[2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 \pm \sqrt{-27\Delta}\right],$$

wobei

$$c_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad c_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad c_3 = x_1x_2x_3$$

gesetzt ist, und wie oben

$$\sqrt{\Delta} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

bedeutet.

Für $n = 4$ ist die Funktion der vier Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 unter Beibehaltung der Bedeutung des ω

$$\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 + x_3 x_4) + (x_1 x_3 + x_2 x_4)\omega + (x_1 x_4 + x_2 x_3)\omega^2$$

sechswertig; ihre dritte Potenz wird zweiwertig, wie die Vergleichung mit der vorangehenden Funktion φ zeigt.

Hierbei sind die drei Klammergrößen der rechten Seite der letzten Gleichung von Interesse:

$$\chi_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4, \quad \chi_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4, \quad \chi_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3$$

sind dreiwertige Funktionen von vier Elementen; χ_1, χ_2, χ_3 sind zueinander konjug.

§ 163. Jede ϱ-wertige Funktion $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist Wurzel einer Gleichung ϱ^{ten} Grades, deren Koeffizienten symmetrische Funktionen der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und deren weitere Wurzeln die $(\varrho - 1)$ Größen

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \varphi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \varphi_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sind, die die konjugen Funktionen von $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liefern.

In der Tat ist jede symmetrische Funktion von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$ zugleich eine symmetrische Funktion der Elemente $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Denn jede Substitution der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ untereinander vertauscht nur die $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\varrho$ in sich, ändert also deren symmetrische Funktionen in keiner Weise. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_\varrho &= -S_1(x_1, x_2, \ldots), \\
\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3 + \cdots + \varphi_{\varrho-1}\varphi_\varrho &= +S_2(x_1, x_2, \ldots), \\
\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \cdots + \varphi_{\varrho-2}\varphi_{\varrho-1}\varphi_\varrho &= -S_3(x_1, x_2, \ldots),
\end{aligned}$$

wobei die rechts stehenden $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_\varrho$ symmetrisch in den $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Dann wird

$$\begin{aligned}
(13) \qquad & (t - \varphi_1)(t - \varphi_2)(t - \varphi_3) \cdots (t - \varphi_\varrho) \\
& \equiv t^\varrho + S_1 \cdot t^{\varrho-1} + S_2 \cdot t^{\varrho-2} + \cdots + S_\varrho = 0
\end{aligned}$$

die Gleichung, deren Wurzeln die ϱ konjugen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\varrho$ sind. Nach § 158, S. 193 kann diese Gleichung nur für $\varrho = 2$ binomisch werden.

§ 164. Gehören die beiden ganzen Funktionen

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad \chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

derselben Gattung an, d. h. bleiben beide für dieselben Sub-

stitutionen der x_α ungeändert, so ist jede von ihnen rational durch die andere ausdrückbar mit Koeffizienten, die in den x_α symmetrisch sind. In der Tat gehört die rationale gebrochene Funktion

$$(14) \qquad \frac{\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{t - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\chi_1}{t - \varphi_1}$$

zu der gleichen Gattung wie φ_1 und χ_1. Wendet man nun die Schlüsse aus § 155 auf φ_1 und χ_1 gleichzeitig an, so zeigt es sich, daß jedem der konjugen Werte φ_α ein Wert χ_α, also auch ein Wert

$$\frac{\chi_\alpha}{t - \varphi_\alpha}$$

zugeordnet werden kann, der zu der gleichen Gattung wie φ_α gehört. Daher ist

$$\frac{\chi_1}{t - \varphi_1} + \frac{\chi_2}{t - \varphi_2} + \quad + \frac{\chi_\varrho}{t - \varphi_\varrho}$$

eine gebrochene symmetrische Funktion; ihr Hauptnenner N kann nach dem vorigen Paragraphen

$$(13) \quad (t-\varphi_1)(t-\varphi_2)\cdots(t-\varphi_\varrho) = t^\varrho + S_1 t^{\varrho-1} + S_2 t^{\varrho-2} + \cdots + S_\varrho = N(t)$$

gesetzt werden. Es folgt

$$\left(\frac{\chi_1}{t - \varphi_1} + \frac{\chi_2}{t - \varphi_2} + \cdots + \frac{\chi_\varrho}{t - \varphi_\varrho}\right) N(t) = Z(t),$$

wo $Z(t)$ ganz in t und ganz und symmetrisch in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wird.

Für $t = \varphi_1$ ergibt sich hieraus, wenn N' die Ableitung von N nach t genommen bedeutet,

$$\chi_1 = \frac{Z(\varphi_1)}{(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3)\cdots(\varphi_1 - \varphi_\varrho)} = \frac{Z(\varphi_1)}{N'(\varphi_1)}.$$

Die Form des Nenners zeigt, daß er nie verschwindet; die Darstellungen

$$(14a) \qquad \chi_\alpha = \frac{Z(\varphi_\alpha)}{N'(\varphi_\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, \varrho)$$

zeigen, daß die Ausdrücke (14) nie illusorisch werden können.

Damit ist der behauptete Satz bewiesen. Seine Umkehrung lautet: Sind zwei Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegenseitig rational durcheinander darstellbar,

$$\chi_1 = G(\varphi_1), \quad \varphi_1 = H(\chi_1),$$

so gehören beide derselben Gattung an. Die erste der beiden Gleichungen zeigt, daß χ_1 bei jeder Substitution, die zur Gruppe von φ_1 gehört, ungeändert bleibt; und umgekehrt, daß φ_1 bei jeder zur Gruppe von χ_1 gehörigen Substitution ungeändert bleibt. Daraus

können wir schließen, daß die zu φ_1 und zu χ_1 gehörigen Gruppen miteinander identisch sind, daß also φ_1 und χ_1 zu der gleichen Funktionengattung gehören.

§ 165. Aus § 149, S. 183 kann man weiter einen wichtigen Schluß ziehen. Es sei eine ϱ-wertige Funktion $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \varphi_1$ gegeben, zu der die ϱ konjugen Werte

$$(15) \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\varrho$$

gehören. Die Gruppe G von φ sei von der Ordnung r, so daß $r \cdot \varrho = n!$ wird. Auf (15) wenden wir nun sämtliche $n!$ Substitutionen s_α der Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ an; das ergebe die $n!$ Anordnungen

$$(16) \qquad \varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \varphi_{\alpha_3}, \ldots, \varphi_{\alpha_\varrho},$$

die man als Permutationen der Elemente (15) auffassen und zur Konstruktion von $n!$ Substitutionen

$$\sigma_\alpha \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_3, & \ldots, & \varphi_\alpha \\ \varphi_{\alpha_1}, & \varphi_{\alpha_2}, & \varphi_{\alpha_3}, & \ldots, & \varphi_{\alpha_\varrho} \end{pmatrix}$$

benutzen kann.

Nun gibt es gerade $\varrho!$ verschiedene Substitutionen σ_α von ϱ Elementen. Ist also $\varrho < n$, so wird die Anzahl der σ_α kleiner als die der s_α, nämlich $< n!$ Daher gibt es mindestens zwei Substitutionen der x, etwa s_i und s_k, die voneinander verschieden sind, gleichwohl aber die gleiche Umstellung der Elemente φ_α hervorrufen. In diesem Falle muß $s_i s_k^{-1}$ jedes einzelne dieser Elemente φ_α an seiner Stelle lassen, d. h. die nicht identische Substitution $s_i s_k^{-1}$ läßt alle Werte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$ ungeändert, gehört also zu den Gruppen der einzelnen konjugen Werte (16). Ist $\varrho > 2$, so kann dies nur bei $n = 4$ und $\varrho = 3$ eintreten; und in der Tat haben wir bereits eine Gattung solcher Funktionen kennen gelernt, zu der z. B.

$$\varphi \equiv x_1 x_2 + x_3 x_4$$

gehört. Abgesehen hiervon gibt es für $2 < \varrho < n$ keine ϱ-wertige Funktionengattung von n Elementen.

An das erlangte Resultat knüpft sich naturgemäß die Frage, ob es Gattungen gibt, für die $\varrho = n$ ist. Daß diese Frage bejaht werden muß, zeigt das einfache Beispiel

$$\varphi_1 = x_1, \ \varphi_2 = x_2, \ \ldots, \ \varphi_\varrho = \varphi_n = x_n \qquad (\varrho = n).$$

Es läßt sich aber zeigen, daß bei $\varrho = n < 6$ weitere derartige Gattungen nicht vorhanden sind. Doch das tritt aus dem Bereiche der „Grundlehren" heraus.

Vierzehntes Kapitel.

Die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen.

§ 166. Wir haben, dem geschichtlichen Entwicklungsgange der Algebra folgend, die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades „gelöst", ohne doch den Begriff der „Lösung einer algebraischen Gleichung" genau festzulegen. Das soll jetzt geschehen.

Unter Auflösung einer Gleichung verstehen wir die Darstellung der Gleichungswurzeln, deren Existenz ja von uns bewiesen worden ist, als Radikalgrößen; die Gleichungswurzeln sind also Funktionen, die eine endliche Anzahl von Wurzelausdrücken enthalten dürfen, und von transzendenten Operationen frei sind, wenn die Gleichung „auflösbar" ist. Daß dies bei den Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades der Fall ist, hat die ausführliche Behandlung und die wirkliche Herleitung der Gleichungswurzeln gezeigt. Jetzt taucht die Frage auf, ob diese Eigenschaft der Auflösbarkeit allen algebraischen Gleichungen zukommt, oder ob sie auf gewisse Klassen algebraischer Gleichungen beschränkt bleibt. Es wird sich zeigen, daß schon für die allgemeinen Gleichungen fünften Grades die Eigentümlichkeit der Auflösbarkeit in Wegfall kommt, und damit dann natürlich auch für die allgemeinen Gleichungen höheren Grades, da aus ihrer Auflösbarkeit sofort die der Gleichungen jedes niederen Grades folgen würde.

Um den Beweis des ausgesprochenen Theorems zu liefern, geben wir zunächst kurz zusammenfassend die über Radikalgrößen früher erhaltenen Resultate (§ 22, S. 27) an.

§ 167. Wir gehen bei der Bildung einer Radikalgröße von einem gegebenen Körper K aus. Das durch ihn bestimmte Gebiet erweitern wir durch Hinzunahme, „Adjungierung" einer Größe v_ν, die nicht zu K gehört, von der aber eine Primzahlpotenz etwa mit dem Exponenten p_ν in K vorkommt, so daß

$$(1) \qquad v_\nu^{p_\nu} = F_\nu(K)$$

ist, wo F_ν eine rationale Funktion im Körper K bedeutet. Aus dem durch K und v_ν festgelegten Körper $(v_\nu; K)$ treten wir durch fernere Adjungierung einer Wurzel $v_{\nu-1}$ einer binomischen Gleichung vom Primzahlgrade $p_{\nu-1}$

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad v_{\nu-1}^{p_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(v_\nu; K)$$

in einen wiederum erweiterten Körper $(v_{\nu-1}, v_\nu; K)$; und so gehen wir fort bis zu den Schlußgleichungen

$$\text{(1b)} \qquad \begin{cases} v_2^{p_2} = F_2(v_3, v_4, \ldots, v_\nu; K), \\ v_1^{p_1} = F_1(v_2, v_3, v_4, \ldots, v_\nu; K). \end{cases}$$

So entsteht der Körper $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{\nu-1}, v_\nu; K)$. Jede in diesem Körper enthaltene Größe x ist darstellbar in der Form

$$x = \frac{m_0 + m_1 v_1^1 + m_2 v_1^2 + \cdots}{n_0 + n_1 v_1^1 + n_2 v_1^2 + \cdots},$$

wobei durch Verwendung der Definitionsformel $v_1^{p_1} = F_1$ Zähler und Nenner des Ausdruckes so reduziert werden können, daß keine höhere Potenz von v_1 als die $(p_1 - 1)^{\text{te}}$ auftritt. Die m_α sowie die n_α sind dabei Größen des Körpers $(v_2, v_3, \ldots, v_{\nu-1}, v_\nu; K)$. Ferner haben wir gezeigt (§ 60, S. 70), daß und wie die obige nach v_1 gebrochene Form von x in eine nach v_1 ganze Form von der Gestalt

$$\text{(2)} \qquad x = l_0 + l_1 v_1 + l_2 v_1^2 + \cdots + l_{p_1-1} v_1^{p_1-1}$$

übergeführt werden kann. Die l_α sind Größen des Körpers $(v_2, v_3, \ldots, v_\nu; K)$

Wir können die Darstellung des x noch weiter vereinfachen. Es sei $l_\alpha v_1^\alpha$ eins der in der obigen Darstellung von x auf l_α folgenden, nicht verschwindenden Glieder. Wir führen dann eine neue Größe

$$w_1 = l_\alpha v_1^\alpha,$$

ein und haben für sie

$$w_1^{p_1} = l_\alpha^{p_1} F_1^\alpha(v_2, v_3, \ldots) = \Phi(v_2, v_3, \ldots).$$

Nun bestimmen wir zwei ganze Zahlen r und s, für die $\alpha r + p_1 s = 1$ ist, was nach den Elementen der Zahlentheorie stets angeht, und erheben die vorletzte Gleichung $w_1 = l_\alpha v_1^\alpha$ in die r^{te} Potenz; dabei folgt der Reihe nach

$$w_1^r = l_\alpha^r v_1^{\alpha r} = l_\alpha^r v_1^{1-sp_1} = l_\alpha^r F_1^{-s} \cdot v_1,$$

$$v_1 = \frac{F_1^s}{l_\alpha^r} \cdot w_1^r = k_r w_1^r;$$

k gehört dem Körper $(v_2, v_3, v_4, \ldots, v_\nu; K)$ an. Tragen wir den Wert von v_1 in den Ausdruck (2) für x ein und berücksichtigen $w_1 = l_\alpha v_1^\alpha$, so entsteht die Form

$$\text{(2a)} \qquad \begin{aligned} x &= k_0 + w_1 + k_2 w_1^2 + k_3 w_1^3 + \cdots + k_{p_1-1} w_1^{p_1-1}, \\ w_1^{p_1} &= \Phi_1(v_2, v_3, \ldots, v_\nu; K). \end{aligned}$$

Man darf somit in der Darstellung der Größe x das v_1 aus (1b) durch w_1 ersetzen und gelangt dadurch zu (2).

§ 168. Für unseren weiteren Gang brauchen wir einen zuerst von Abel ausgesprochenen Hilfssatz (Oeuvres, édit. Sylow et Lie, II, p. 228), der folgendermaßen lautet:

Bedeutet p eine Primzahl und $f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}, f$ eine Reihe von Größen eines gegebenen Körpers K, so folgt aus dem gleichzeitigen Bestehen der beiden Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{gathered} f_0 + f_1 w + f_2 w^2 + \cdots + f_{p-1} w^{p-1} = 0, \\ w^p - f = 0, \end{gathered}$$

daß entweder $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}$ einzeln verschwinden, oder daß eine der Wurzeln der zweiten Gleichung (3) dem Körper K angehört.

Sind nämlich nicht alle Größen $f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}$ gleich Null, dann haben die Polynome der beiden Gleichungen (3) einen gemeinsamen Teiler, der als Divisor des zweiten Polynoms die Form

$$w^m + g_{m-1} w^{m-1} + g_{m-2} w^{m-2} + \cdots + g_1 w^1 + g_0$$

besitzt, in der alle $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ dem Körper K angehören. Setzt man diese letzte Funktion gleich Null, so entsteht eine Gleichung, deren Wurzeln unter denen von $w^p = f$ vorkommen. Ist w_1 eine der Wurzeln dieser binomischen Gleichung, so sind alle Wurzeln derselben durch die Reihe

$$w_1, \ \omega w_1, \ \omega^2 w_1, \ \ldots, \ \omega^{p-1} w_1$$

gegeben, wo ω eine primitive p^{te} Einheitswurzel bedeutet. Danach wird

$$(3\text{a}) \qquad g_0 = \pm \omega^{\varrho} w_1^{\,m}.$$

Nun können wir zwei ganze Zahlen r, s finden, die der Bedingung $mr + ps = 1$ genügen. Erhebt man die Gleichung (3a) in die r^{te} Potenz, so ergibt sich

$$g_0^{\,r} \equiv \pm \omega^{r\varrho} w_1^{\,mr} = \pm \omega^{r\varrho} w_1^{\,1-ps} = \pm \omega^{r\varrho} f^{-s} w_1,$$

und daraus dann

$$w_1 = + \frac{g_0^{\,r} f^s}{}. \quad \omega^{r\varrho} w_1 = \pm g_0^{\,r} f^s.$$

Es ist also wirklich die Größe $\omega^{r\varrho} w_1$ als eine Wurzel von $w^p = f$ in K enthalten.

§ 169. Um zu dem gesteckten Ziele zu gelangen, nehmen wir an, die vorgelegte algebraische Gleichung

$$(4) \qquad f(x) = 0$$

sei auflösbar im Sinne des § 166, und

$$(5)\qquad \begin{aligned} x_1 &= k_0 + w_1 + k_2 w_1^2 + \cdots + k_{p_1-1} w_1^{p_1-1} \\ w_1^{p_1} &= \Phi_1(v_2, v_3, \ldots, v_\nu; K) \end{aligned}$$

eine ihrer Wurzeln. Setzt man (5) in $f(x_1) = 0$ ein und ordnet das Resultat nach Potenzen von w_1, dann kann man (4) in der Form schreiben

$$K_0 + K_1 w_1 + K_2 w_1^2 + \cdots + K_{p_1-1} w_1^{p_1-1} = 0;$$

nimmt man dazu die Definitionsgleichung $w_1^{p_1} = \Phi_1$, so läßt sich auf beide Gleichungen der A b e l sche Hilfssatz des vorigen Paragraphen anwenden: entweder ist eine Wurzel von $w_1^{p_1} = \Phi_1$ rational im Körper $(v_2, v_3, \ldots, v_\nu; K)$; oder es ist als zweite Möglichkeit

$$(6)\qquad K_0 = 0,\; K_1 = 0,\; K_2 = 0,\; \ldots,\; K_{p_1-1} = 0.$$

Im ersten Falle ist die Einführung von w_1 unnötig, wenn bereits eine primitive p_1^{te} Einheitswurzel dem Körper angehört, und die Darstellung von x_1 läßt sich vereinfachen; ist die Darstellung schon möglichst einfach, so kann dieser Fall nicht eintreten. Wir nehmen deswegen an, die zur Auflösung von (4) etwa notwendigen Einheitswurzeln seien von vornherein dem Körper K adjungiert, und die Darstellung der Wurzel x_1 sei einer weiteren Reduktion nicht zugänglich. Dann tritt die zweite obige Eventualität ein, laut deren das Gleichungssystem (6) erfüllt ist.

Setzt man in $f(x_1)$ statt x_1 den Ausdruck

$$(7)\qquad x_{\alpha+1} = k_0 + w_1\omega_1^{\alpha} + k_2 w_1^2 \omega_1^{2\alpha} + \cdots + k_{p_1-1} w_1^{p_1-1} \omega_1^{\alpha(p_1-1)}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, p_1 - 1);\; \omega_1^{p_1} = 1,$$

ein, so ergibt sich wegen (6) die Darstellung von

$$f(x_{\alpha+1}) = K_0 + K_1 w_1 \omega_1^{\alpha} + K_2 w_1^2 \omega_1^{2\alpha} + \cdots + K_{p_1-1} w_1^{p_1-1} \omega_1^{(p_1-1)\alpha} \equiv 0$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, p_1 - 1);$$

folglich sind alle Größen (7) Wurzeln von (1).

Multipliziert man jedes $x_{\alpha+1}$ mit $\omega_1^{-\alpha}$ für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, p_1 - 1$ und addiert die Produkte, so liefert die Summe

$$(8)\qquad \frac{1}{p_1} \sum x_{\alpha+1}\omega_1^{-\alpha} = w_1 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, p_1 - 1),$$

d. h. die Radikalgröße w_1 ist eine rationale Funktion der Wurzeln von (1), wobei ω_1 schon in K vorkommen kann.

Denkt man sich ferner in dem Ausdrucke

(8a) $$y - \left(\frac{1}{p_1}\sum x_{\alpha+1}\omega_1^{-\alpha}\right)^{p_1} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, p_1 - 1)$$

alle Permutationen der Wurzeln x_α der Gleichung $f(x) = 0$ gemacht, so ist das Produkt aller dieser Ausdrücke eine ganze Funktion von y, deren Koeffizienten symmetrisch in den Wurzeln von (1), also bekannt sind. Bezeichnet man diese Funktion mit $g(y)$, so hat die Gleichung $g(y) = 0$ eine Wurzel y_1 von der Form

$$y_1 = w_1^{p_1} = h_0 + h_1 v_2 + h_2 v_2^2 + \cdots + h_{p_1-1} v_2^{p_2-1}.$$

Hier kann man zunächst v_2 durch ein w_2 ersetzen, so daß

(9) $$y_1 = g_0 + w_2 + g_2 w_2^2 + \cdots + g_{p_2-1} w_2^{p_2-1}$$

und hierin

(9a) $$w_2^{p_2} = \Phi_2(v_3, v_4, \ldots, v_\nu; K)$$

wird. Wendet man auf die beiden letzten Gleichungen (9) und (9a) die zu Anfang dieses Paragraphen gemachten Schlüsse und Folgerungen an, so sieht man, daß wie w_1 so auch w_2 eine ganze Funktion der Wurzeln von $f(x) = 0$ ist.

In derselben Weise kann man fortfahren und kommt dabei auf eine Reihe von Radikalgrößen, $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, die sämtlich ganze Funktionen der Wurzeln x_α der Gleichung $f(x) = 0$ sind, und zwar derart, daß die p_α^{te} Potenz von w_α (wo p_α eine Primzahl bedeutet) zum Körper $(w_{\alpha+1}, \ldots, w_\nu; K)$ gehört.

§ 170. Diese Darstellung gewährt die Möglichkeit, den Fundamentalsatz zu beweisen: Die allgemeinen Gleichungen von höherem als dem vierten Grade sind nicht durch Wurzelausziehungen lösbar. Bei einer etwa möglichen Auflösung wäre so vorzugehen: Der ursprünglich gegebene Körper K, dem die Koeffizienten der Gleichung $f(x) = 0$ angehören müssen, und dem die primitiven Einheitswurzeln, soweit sie nötig sind, angehören sollen, umfaßt bei einer allgemeinen Gleichung (d. h. bei einer solchen, bei der keine Relationen unter den Wurzeln statthaben) als Funktionen dieser Wurzeln nur die symmetrischen; denn sonst wäre eben eine Relation vorhanden. Zu einer Erweiterung des Körpers K führt die Adjungierung der p_ν^{ten} Wurzel w_ν aus einer symmetrischen Funktion $w_\nu^{p_\nu}$. Nach § 160, S. 196 ist dies nur möglich, wenn $p_\nu = 2$, also w_ν alternierend ist. Eine erneute Erweiterung des Körpers würde die Existenz einer mehrwertigen Funktion $w_{p_\nu - 1}$ fordern, von der eine Primzahlpotenz zweiwertig wird. Nach § 161, S. 198 gibt es bei mehr als vier

Elementen x_α keine derartige Funktion. Folglich ist in diesem Falle eine Erweiterung des Körpers über das Gebiet der zweiwertigen Funktionen hinaus nicht mehr möglich. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Zugleich hat sich gezeigt, daß bei jeder auflösbaren Gleichung die innerste Irrationalität, d. h. die bei wirklicher numerischer Berechnung zuerst auszuführende, die Quadratwurzel aus der Diskriminante sein wird.

§ 171. Der italienische Mathematiker P. Ruffini (1765—1822) war wohl der erste, der die Unauflösbarkeit der Gleichungen von höherem als dem vierten Grade zu beweisen versuchte; dies geschah 1799 in seinem Werke „Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto“. Sein Beweis ist aber insofern unvollständig, als der Satz aus § 169, Schluß ohne Begründung bleibt und als selbstverständlich benutzt wird. — Aus einer Bemerkung von C. Fr. Gauß kann man schließen, daß dieser im Besitz eines Beweises gewesen sei; er schreibt (Werke III, p. 17, Z. 2 v. u.): „Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem [solutionis] jam pro quinto gradu omni rigore demonstrare, de qua re alio loco disquisitiones meas fusius proponam.“ Dieses Vorhaben hat sich freilich nicht verwirklicht; und so war es H. N. Abel vorbehalten, den ersten zwingenden Beweis des Theorems zu veröffentlichen (Journ. f. Mathem. 1826, Bd. I, S. 56); ihm sind wir im voraufgehenden gefolgt unter Benutzung der von L. Kronecker gegebenen Präzisierungen und Vereinfachungen (Berl. Monatsber. 1879, 3. März) zum Abelschen Beweise.

Des weiteren würde sich die Untersuchung nun nach zwei Richtungen zu erstrecken haben. Einmal würde es sich um die Theorie der auflösbaren Gleichungen handeln: worin bestehen ihre charakteristischen Eigenschaften? wie gestaltet sich die allgemeine Form ihrer Wurzeln? usw. — und andererseits um die Theorie der nicht durch Wurzeln lösbaren Gleichungen, wobei als eine der wichtigsten Fragen sich die herausstellt: welches sind nach den binomischen die einfachsten Hilfsgleichungen, auf deren Lösung diejenige umfassenderer Gruppen von höheren Gleichungen reduziert werden kann? — Diese Untersuchungen würden aber aus dem Rahmen der „Grundlehren“ heraustreten, so daß wir von einem näheren Eingehen auf sie Abstand nehmen müssen.

Dagegen wollen wir die neu gewonnenen Anschauungen über die mehrwertigen rationalen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung zu einer von den früheren verschiedenen Lösungsmethode der kubischen

und der biquadratischen Gleichungen verwenden. Die Methode stammt von Lagrange (Oeuvres, Tome VIII, p. 143).

§ 172. Wir gehen von der Gleichung

$$x^3 - c_1 x^2 + c_2 x - c_3 = 0$$

mit den Wurzeln x_1, x_2, x_3 aus, deren symmetrische Funktionen durch die c_1, c_2, c_3 rational darstellbar, also bekannt sind. Zu einer Erweiterung des Rationalitätsbereiches gelangen wir durch Adjungierung der Quadratwurzel aus der Diskriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 \\ &= -(4c_2^3 + 27c_3^2) + 18c_1c_2c_3 + c_1^2c_2^2 - 4c_1^3c_3; \end{aligned}$$

$\sqrt{\Delta}$ ist dabei eine nicht einwertige Funktion von x_1, x_2, x_3, deren Quadrat einwertig wird. Jetzt gehören alle zweiwertigen Funktionen zum Rationalitätsbereiche. Für eine nochmalige Erweiterung ist die Frage von entscheidender Bedeutung, ob es eine mehrwertige Funktion von drei Elementen x_1, x_2, x_3 gibt, von der eine Potenz zweiwertig wird, ohne daß sie selbst es ist. Durch die Existenz der sechswertigen Funktion

$$\varphi_1 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 \qquad \left(\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)$$

wird die Frage bejaht, denn es wird, wenn wir $S = 2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3$ setzen,

$$\begin{aligned} \varphi_1^3 &= \frac{1}{2}\left(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 + 3\sqrt{-3\Delta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(S + 3\sqrt{-3\Delta}\right) \end{aligned}$$

zweiwertig. Ebenso liefert

$$\varphi_2 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$$

als dritte Potenz

$$\varphi_2^3 = \frac{1}{2}\left(S - 3\sqrt{-3\Delta}\right).$$

Aus den drei Gleichungen, zu denen man so gelangt ist, nämlich

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= c_1, \\ x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(S + 3\sqrt{-3\Delta}\right)}, \qquad (1 + \omega + \omega^2 = 0) \\ x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(S - 3\sqrt{-3\Delta}\right)}, \end{aligned}$$

findet man durch Kombination

$$x_1 = \frac{1}{3}\left[c_1 + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(S+3\sqrt{-3\Delta})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(S+3\sqrt{-3\Delta})}\right],$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\left[c_1 + \omega\sqrt[3]{\frac{1}{2}(S+3\sqrt{-3\Delta})} + \omega^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}(S-3\sqrt{-3\Delta})}\right],$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\left[c_1 + \omega^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}(S+3\sqrt{-3\Delta})} + \omega\sqrt[3]{\frac{1}{2}(S-3\sqrt{-3\Delta})}\right]$$

und hat damit die drei Wurzeln der vorgelegten kubischen Gleichung als Radikalgrößen erlangt. —

§ 173. Für die Lösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades

$$x^4 - c_1x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_4 = 0$$

mit den vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 ist zunächst der Übergang von den einwertigen zu den zweiwertigen Funktionen durch die Adjungierung der Quadratwurzel aus der Diskriminante zu vollziehen. Ferner gibt es für vier Elemente x_1, x_2, x_3, x_4 sechswertige Funktionen, wie z. B.

$$\varphi = (x_1x_2 + x_3x_4) + \omega(x_1x_3 + x_2x_4) + \omega^2(x_1x_4 + x_2x_3)$$
$$\left(\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right),$$

deren dritte Potenz $\varphi^3 = \psi$ zweiwertig ist,

$$\begin{aligned}\psi = {} & (x_1x_2 + x_3x_4)^3 + (x_1x_3 + x_2x_4)^3 + (x_1x_4 + x_2x_3)^2 \\ & + 6(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3) \\ & - \frac{3}{2}[(x_1x_2 + x_3x_4)^2(x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)^2 + \cdots] \\ & \pm \frac{3}{2}\sqrt{-3}\cdot[(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)].\end{aligned}$$

Es reicht also hin, φ, die dritte Wurzel aus ψ, zum Rationalitätsbereiche hinzuzunehmen, um alle Funktionen der durch φ charakterisierten Gattung rational bekannt zu machen. Die zu φ gehörige Substitutionengruppe besteht aus den vier Substitutionen

$$1, \quad \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 \\ x_2 x_1 x_4 x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 \\ x_3 x_4 x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 \\ x_4 x_3 x_2 x_1 \end{pmatrix}.$$

Zu derselben Gruppe gehört, und ist demnach rational durch φ darstellbar das Quadrat der Funktion

$$\chi = (x_1x_2 - x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4),$$

während ψ nur für die beiden ersten jener vier Substitutionen sich nicht ändert. Durch Adjungierung der Quadratwurzel aus der als be-

kannt angesehenen Funktion χ^2 gelangt man also zu der Gattung zwölfwertiger Funktionen mit der Gruppe zweiter Ordnung

$$1, \quad \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 \\ x_2 x_1 x_4 x_3 \end{pmatrix} \qquad (x_1 x_2)(x_3 x_4).$$

Endlich hat die Funktion, die in den x_1, x_2, x_3, x_4 homogen und linear gestaltet ist, nämlich

$$\tau = x_1 + i x_2 - x_3 - i x_4 \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

24 Werte, die sämtlich zur gleichen Gruppe gehören (die hier zur identischen Substitution zusammenschrumpft). Daher ist jeder der 24 Werte von χ durch jeden anderen unter ihnen rational darstellbar. Gattungen, die alle konjugen Werte einer Funktion enthalten, so daß jeder ihrer Werte durch jeden anderen unter ihnen rational ausgedrückt werden kann, heißen Galoissche Gattungen.

Die Funktion τ^2 gehört zu derselben Gruppe wie χ, ist also bekannt, und die Adjungierung der Quadratwurzel aus ihr macht mit χ jede ganze Funktion von x_1, x_2, x_3, x_4 zu einer rational bekannten, insbesondere die vier Größen x_α selber. Damit ist dann die Lösung der biquadratischen Gleichung vollendet.

Wir hätten den Gang der Lösung auch noch anders führen können, indem wir uns durch die Existenz der am Ende des vorigen Kapitels angegebenen sechswertigen Funktion von vier Elementen hätten leiten lassen.

Fünfzehntes Kapitel.

Transformation. Invarianten und Kovarianten. Quadratische Formen.

§ 174. Wir haben gelegentlich in einer Funktion $f(x)$ an Stelle der Unbekannten x eine andere Unbekannte y eingeführt; so bei der Behandlung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades zum Zweck der Entfernung ihres zweiten Gliedes, so bei den reziproken Gleichungen zum Zweck der Gradverminderung. Wir wollen eine solche Operation der Änderung der Unbekannten oder der Variablen, gleichgültig ob es sich um eine oder um mehrere solche handelt, eine Transformation nennen. Das allgemeine, hiermit verbundene Problem ist also das: in die gegebene Funktion $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ statt der x die durch die m gegebenen Gleichungen

$$y_\alpha = \varphi_\alpha(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

definierten y einzutragen und die dabei auftretende Funktion

$$F(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$$

zu bestimmen.

Unter diesen Begriff der Transformation fallen die im vorigen Kapitel behandelten Substitutionen; denn man kann die Substitution

$$s_\alpha = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_m \\ x_{\alpha_1}, & x_{\alpha_2}, & x_{\alpha_3}, & \ldots, & x_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

durch die Aufeinanderfolge der beiden Transformationen

$$y_\varkappa = x_{\alpha_\varkappa}, \quad y_\varkappa = x_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

ersetzen.

§ 175. Zunächst wenden wir uns dem Falle $m = 1$ zu und setzen dabei

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1} x + c_n, \\ y \;\;\;\, = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_{n-1} x^{n-1}. \end{cases}$$

Daß in dem Ausdrucke für y keine Glieder mit höheren Potenzen von x eingetragen sind, ist keine Einschränkung, da sich x^n, x^{n+1}, $x^{n+2}, \ldots$ mit Hilfe von $f(x) = 0$ durch die Potenzen mit den niedrigeren Exponenten ausdrücken lassen. Es kommt jetzt darauf an, aus den beiden Gleichungen (1) die Größe x zu eliminieren. Dies geschieht durch die Bildung der Resultanten (siehe Kap. 6) beider Gleichungen (1)

$$c_n^{n-1} F(y) = \pm \begin{vmatrix} u_0 - y & u_1 & u_2 & \ldots \\ 0 & u_0 - y & u_1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots \\ 0 & c_n & c_{n-1} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ Zeilen,} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} (n-1) \text{ Zeilen.} \end{matrix}$$

Aus dieser Form erhellt, daß $F(y)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades in y ist, so daß man setzen kann

$$(2) \qquad F(y) = y^n + C_1 y^{n-1} + C_2 y^{n-2} + \cdots + C_{n-1} y^1 + C_n.$$

Hierin bedeutet jedes C_α eine homogene Funktion der Dimension α in den Größen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Man könnte nun versuchen, durch geschickte Wahl der Koeffizienten $u_0, u_1, u_2, \ldots$ in (1) einige der Koeffizienten C_α in (2) zum

Verschwinden zu bringen. Den einfachsten Fall, nämlich daß $C_1 = 0$ ist, haben wir schon früher dadurch erledigt, daß wir setzten

$$-\frac{c_1}{n} + y, \qquad \frac{c_1}{n} + x.$$

Dadurch ging (2) über in

$$y^n + C_2 y^{n-2} + C_3 y^{n-3} + \cdots + C_{n-1} y + C_n = 0. \tag{2a}$$

Die Angabe der Transformation (2) und ihre Verwendung zur Vereinfachung der vorgelegten Gleichung (1) rührt von E. W. v. Tschirnhausen (1631—1708) her. Ihre Anwendung auf Gleichungen fünften Grades stammt von dem schwedischen Mathematiker E. S. Bring (1736—1793); das Jahr der Veröffentlichung ist 1786. Die Entdeckung Brings geriet in Vergessenheit, bis sie C. Hill im Jahre 1863 wieder ans Licht zog. Hierdurch wurde gleichzeitig die Priorität Brings gegenüber dem Engländer Jerrard gewahrt, dessen Untersuchungen aus 1834 stammen. Ihre Resultate sind, bezogen auf die Gleichungen fünften Grades, die folgenden: Man kann (1) auf eine der vier Formen bringen:

$$\begin{aligned} z^5 + z + A &= 0, \quad z^5 + z^3 + A = 0, \\ z^5 + z^2 + A &= 0, \quad z^5 + z^4 + A = 0; \end{aligned} \tag{3}$$

und zwar, abgesehen von linearen Umformungen, durch die Auflösung einer kubischen oder einer biquadratischen Gleichung. Die Formen (3) können vorteilhaft für die tabellarische Lösung der Gleichungen fünften Grades benutzt werden, da bei ihnen nur ein einziger Parameter A auftritt.

§ 176. An zweiter Stelle betrachten wir die Transformation von

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n = f(x)$$

durch die gebrochene lineare Substitution

$$x = \frac{a_{11} y + a_{12}}{a_{21} y + a_{22}}.$$

Hierbei ist es vorteilhaft, gebrochene Ausdrücke durch die Einführung von homogenen Funktionen, d. h. von Formen fern zu halten und die Aufgabe so zu formulieren: es soll die binäre Form n^{ter} Ordnung

$$f(x_1, x_2) = c_0 x_1^n + c_1 x_1^{n-1} x_2^1 + c_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + c_n x_2^n \tag{4}$$

durch die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{aligned} \qquad (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = A \neq 0) \tag{5}$$

transformiert werden. Die Bedingung $A \neq 0$ ist charakteristisch dafür, daß die y_1, y_2 umgekehrt durch die x_1, x_2 ausgedrückt werden können. Das Resultat der Transformation sei

$$f_0(y_1, y_2) = c_0' y_1^n + c_1' y_1^{n-1} y_2' + c_2' y_1^{n-2} y_2^2 + \cdots + c_n' y_2^n.$$

Hier tritt nun eine neue, besonders wichtige Funktionenbildung in die Erscheinung, die der Invarianten. Ein Polynom I der Koeffizienten von (4) heißt eine Invariante von (4), wenn eine Gleichung von der Form

$$(6) \qquad I(c_0', c_1', \ldots, c_n') = \psi(a_{11}, \ldots, a_{22}) \cdot I(c_0, c_1, \ldots, c_n)$$

für alle Systeme der c und der a gilt.

Es läßt sich nachweisen, daß $\psi = A^\varkappa$, also daß

$$(7) \qquad I(c_0', c_1', \ldots, c_n') = A^\varkappa \cdot I(c_0, c_1, \ldots, c_n)$$

wird; $\varkappa$ heißt das Gewicht von I. Ist $\varkappa = 0$, dann heißt I eine absolute Invariante:

$$(8) \qquad I(c_0', c_1', \ldots, c_n') = I(c_0, c_1, \ldots, c_n).$$

§ **177.** Wir leiten einige Eigenschaften der Invarianten her.

Die Invariante I ist in den Koeffizienten c_α der Form f homogen. Denn wenn wir die Substitution $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$ auf f anwenden, dann wird $A^\varkappa$ gleich $\lambda^{2\varkappa}$ und daher wird die rechte Seite von (7) und auch jedes einzelne Glied der linken durch die $(2\varkappa)^{\text{te}}$ und keine höhere Potenz von λ teilbar. Nun wandelt die soeben angegebene Substitution f in $f_0 = \lambda^\varkappa f(y_1, y_2)$, und jedes c_α in $\lambda^n c_\alpha$ um. Folglich ist die Dimension jedes Gliedes von I gleich $(2\varkappa : n)$; und das ist bei allen Gliedern von I die gleiche; also ist I homogen.

Die Invariante I ist in den Koeffizienten c_α der Form f isobar. Denn wenn wir auf $f(x_1, x_2)$ die Substitution $x_1 = y_1$, $x_2 = \lambda y_2$ anwenden, dann wird $A^\varkappa = \lambda^\varkappa$ und daher die rechte Seite von (7) sowie auch die einzelnen Glieder der linken durch die $\varkappa^{\text{te}}$ und durch keine höhere Potenz von λ teilbar. Nun wandelt die soeben angegebene Substitution die Form f in

$$f_0(y_1, y_2) = c_0 y_1^n + c_1 \lambda y_1^{n-1} y_2^1 + c_2 \lambda^2 y_1^{n-2} y_2^2 + c_3 \lambda^3 y_1^{n-3} y_2^3 + \cdots + c_n \lambda^n y_2^n,$$

also jedes c_α in $c_\alpha \lambda^\alpha$ um. Ist jetzt

$$\text{const. } c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n}$$

ein beliebiger Summand der Invariante $I(c_0, c_1, \ldots)$, so wird der entsprechende Summand von $I(c_0', c_1', \ldots)$ gleich

$$\text{const.}\ c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} \cdot \lambda^{\varrho}$$
$$(\varrho = 0\alpha_0 + 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n),$$

und wegen (7) wird $\varrho = \varkappa$. Damit ist der Beweis des ausgesprochenen Satzes geliefert.

Die Invariante I bleibt, abgesehen von ihrem Vorzeichen, ungeändert, wenn man in ihr jedes c_α durch $c_{n-\alpha}$ ersetzt. Das folgt durch die schon zweimal benutzte Methode aus (7) unter Verwendung der Substitution $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$.

§ 178. Ist nun, in ihre Wurzelfaktoren zerlegt,

$$(9) \qquad \begin{cases} f(x, 1) = c_0(x - u_1)(x - u_2) \ldots (x - u_n), \\ f_0(y, 1) = c_0(y - v_1)(y - v_2) \ldots (y - v_n), \end{cases}$$

und daher

$$(9\text{a}) \qquad \begin{cases} f(x_1, x_2) = c_0(x_1 - u_1 x_2)(x_1 - u_2 x_2) \ldots (x_1 - u_n x_2), \\ f_1(y_1, y_2) = c_0(y_1 - v_1 y_2)(y_1 - v_2 y_2) \ldots (y_1 - v_n y_2), \end{cases}$$

wobei

$$\begin{cases} x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \\ x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \end{cases} \qquad [\alpha\delta - \beta\gamma = A \neq 0],$$

ist, so definieren wir als Diskriminante der Form $f(x_1, x_2)$

$$(10) \qquad D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} c_0^{2n-2} \prod_{\varkappa < \lambda} (u_\varkappa - u_\lambda)^2$$

und behaupten: Die Diskriminante der Form f ist eine Invariante von f.

Um das zu beweisen, betrachten wir einen der in (9a) angegebenen Wurzelfaktoren von f, etwa

$$x_1 - u_\varrho x_2 = (\alpha y_1 + \beta y_2) - u_\varrho(\gamma y_1 + \delta y_2)$$
$$= (\alpha - \gamma u_\varrho)\left[y_1 - \frac{\delta u_\varrho - \beta}{\alpha - \gamma u_\varrho} y_2\right]$$

und ersehen, daß der letzte Bruch gleich

$$v_\varrho - \frac{\delta u_\varrho - \beta}{\alpha - \gamma u_\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt werden kann. Daraus ergibt sich weiter

$$v_\varrho - v_\sigma = \frac{\delta u_\varrho - \beta}{\alpha - \gamma u_\varrho} - \frac{\delta u_\sigma - \beta}{\alpha - \gamma u_\sigma} = A \frac{1}{(\alpha - \gamma u_\varrho)(\alpha - \gamma u_\sigma)}$$

Ferner hat man die Beziehungen

$$c_0' = f_1(1, 0) = f(\alpha, \gamma) = c_0(\alpha - \gamma u_1)(\alpha - \gamma u_2) \ldots (\alpha - \gamma u_n),$$

und aus den letzten beiden Resultaten folgt

$$(c_0')^{2n-2} \prod_{\varrho<\sigma} (v_\varrho - v_\sigma)^2 = A^{n(n-1)} c_0^{2n-2} \prod_{\varrho<\sigma} (u_\varrho - u_\sigma)^2.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen: Die Invariante $D(f) = I$ ist vom Gewichte $n(n-1)$.

§ 179. Wir geben einige Beispiele: Für $n = 2$ und

$$f = c_0 x_1^2 + 2 c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2$$

wird

$$D(f) = c_0 c_2 - c_1^2.$$

Für $n = 3$ und

$$f = c_0 x_1^3 + 3 c_1 x_1^2 x_2 + 3 c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3$$

wird

$$D(f) = c_0^2 c_3^2 - 6 c_0 c_1 c_2 c_3 + 4 c_0 c_2^3 + 4 c_1^3 c_3 - 3 c_1^2 c_2^2.$$

Für $n = 4$ und

$$f = c_0 x_1^4 + 4 c_1 x_1^3 x_2 + 6 c_2 x_1^2 x_2^2 + 4 c_3 x_1 x_2^3 + c_4 x_2^4$$

gibt es die beiden Invarianten

$$I_2 = c_0 c_4 - 4 c_1 c_3 + 3 c_2^2,$$

$$I_3 = c_0 c_2 c_4 - c_0 c_3^2 - c_1^2 c_4 + 2 c_1 c_2 c_3 - c_2^3,$$

unter deren Benutzung sich auch die Funktion

$$D(f) = I_2^3 - 27 I_3^2$$

von der Dimension 6 als Diskriminante ergibt.

§ 180. Der eingeführte Begriff der Invarianten läßt zunächst Erweiterungen naheliegender Natur nach zwei Richtungen zu: einmal durch Vermehrung der zu transformierenden Gleichungen, einmal durch Vermehrung der Variablen. Wir vereinigen beides und sagen: Sind m Formen von k Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit den Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \ldots$, bzw. $c_0, c_1, c_2, \ldots; \ldots, d_0, d_1, d_2, \ldots; \ldots$ gegeben,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; b_0, b_1, \ldots), \; g(x_1, x_2, \ldots, x_k; c_0, c_1, \ldots),$$
$$h(x_1, x_2, \ldots, x_k; d_0, d_1, \ldots), \; \ldots,$$

die durch die homogenen linearen Substitutionen

$$(11) \qquad x_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \cdots + \alpha_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

mit nicht verschwindender Determinante

$$|\alpha_{ij}| = A \neq 0 \qquad (i,j = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

übergeführt werden in die Formen

$$f_1(y_1, y_2, \ldots, y_k; b_0', b_1', \ldots), \; g_1(y_1, y_2, \ldots, y_k; c_0', c_1', \ldots),$$
$$h(y_1, y_2, \ldots, y_k; d_0', d_1', \ldots), \ldots,$$

so heißt ein Polynom, das der Gleichung

$$I(b_0', b_1', \ldots; c_0', c_1', \ldots; d_0', d_1', \ldots)$$
$$= A^{\varkappa} \cdot I(b_0, b_1, \ldots; c_0, c_1, \ldots; d_0, d_1, \ldots)$$

genügt, eine simultane Invariante der Formen $f, g, h, \ldots$. Der Exponent $\varkappa$ heißt das Gewicht der simultanen Invarianten I.

Als Beispiele mögen zunächst die folgenden dienen:

I. $f \equiv b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$, $g \equiv c_0 x_1^2 + 2 c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2$.

Die Verwendung der Substitution (11) führt auf die Darstellungen

$$\begin{aligned} b_0' &= b_0 \alpha^2 + 2 b_1 \alpha\gamma + b_2 \gamma^2, & c_0' &= c_0 \alpha^2 + 2 c_1 \alpha\gamma + c_2 \gamma^2, \\ b_1' &= b_0 \alpha\beta + b_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + b_2 \gamma\delta, & c_1' &= c_0 \alpha\beta + c_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + c_2 \gamma\delta, \\ b_2' &= b_0 \beta^2 + 2 b_1 \beta\delta + b_2 \delta^2, & c_2' &= c_0 \beta^2 + 2 c_1 \beta\delta + c_2 \delta^2, \end{aligned}$$

und liefert daraus, wenn wieder $A = |\alpha_{ij}|$ ist,

$$b_0' c_2' - 2 b_1' c_1' + b_2' c_0' = A^2 (b_0 c_2 - 2 b_1 c_1 + b_2 c_0),$$

so daß man dadurch die Funktion

$$b_0 c_2 - 2 b_1 c_1 + b_2 c_0$$

als simultane Invariante der beiden binären quadratischen Formen f und g erkennt.

II. Wendet man (11) auf das System der k linearen homogenen Funktionen

$$f_j = b_{j1} x_1 + b_{j2} x_2 + \cdots + b_{jk} x_k \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

an, so findet man die Gleichung

$$|b'_{ij}| = A \cdot |b_{ij}| \qquad (i,j = 1, 2, 3, \ldots, k).$$

Die Determinante der b ist also eine simultane Invariante der f_j.

III. Die Resultante $R(f, g)$ der beiden binären Formen f und g ist eine simultane Invariante für sie. Der Beweis dieses Satzes läuft dem für den Invariantencharakter der Diskriminante $D(f)$

in § 176, Schluß gegebenen durchaus parallel, so daß es nicht nötig erscheint, ihn ausführlich vorzutragen.

§ 181. Eine Erweiterung des Invariantenbegriffes wird auch durch folgende Definition herbeigeführt: Ein Polynom K von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit Koeffizienten, die ganze Funktionen von $b_0, b_1, \ldots; c_0, c_1, \ldots; d_0, d_1, \ldots$ sind, heißt eine Kovariante von $f, g, h, \ldots$, wenn es der Gleichung genügt

$$K(y_1, y_2, \ldots, y_k; b_0', b_1', \ldots; c_0', c_1', \ldots; d_0', d_1', \ldots)$$
$$= A^\varrho \cdot K(x_1, x_2, \ldots, x_k; b_0, b_1, \ldots; c_0, c_1, \ldots; d_0, d_1, \ldots).$$

ϱ heißt das Gewicht der Kovarianten K.

Die quadratische Form der x_1, x_2

$$K = (c_0 c_2 - c_1^2) x_1^2 + (c_0 c_3 - c_1 c_2) x_1 x_2 + (c_1 c_3 - c_2^2) x_2^2$$

ist eine Kovariante der kubischen Form

$$f(x_1, x_2) = c_0 x_1^3 + 3 c_1 x_1^2 x_2 + 3 c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3;$$

denn durch die lineare Substitution (9a) geht f über in

$$c_0' y_1^3 + 3 c_1' y_1^2 y_2 + 3 c_2' y_1 y_2^2 + c_3' y_2^3,$$

wobei

$$c_0' = c_0 \alpha^3 + 3 c_1 \alpha^2 \gamma + 3 c_2 \alpha \gamma^2 + c_3 \gamma^3,$$
$$c_1' = (c_0 \alpha^2 + c_2 \gamma^2)\beta + 2(c_1 \beta + c_2 \delta)\alpha\gamma + (c_1 \alpha^2 + c_3 \gamma^2)\delta,$$
$$c_2' = (c_0 \beta^2 + c_2 \delta^2)\alpha + 2(c_1 \alpha + c_2 \gamma)\beta\delta + (c_1 \beta^2 + c_3 \delta^2)\gamma,$$
$$c_3' = c_0 \beta^3 + 3 c_1 \beta^2 \delta + 3 c_2 \beta \delta^2 + c_3 \delta^3,$$

und K über in

$$(c_0' c_2' - c_1'^2) y_1^2 + (c_0' c_3' - c_1' c_2') y_1 y_2 + (c_1' c_3' - c_2'^2) y_2^2 = A^2 \cdot K.$$

Als zweites Beispiel führen wir die simultane Kovariante der beiden quadratischen Formen, nämlich

$$b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2 \quad \text{und} \quad c_0 x_1^2 + 2 c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2$$

an, die die Gestalt hat

$$K = (b_0 c_1 - b_1 c_0) x_1^2 + (b_0 c_2 - b_2 c_0) x_1 x_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) x_2^2$$
$$= (b_0 x_1 + b_1 x_2)(c_1 x_1 + c_2 x_2) - (b_1 x_1 + b_2 x_2)(c_0 x_1 + c_1 x_2)$$
$$= \begin{vmatrix} b_0 x_1 + b_1 x_2 & b_1 x_1 + b_2 x_2 \\ c_0 x_1 + c_1 x_2 & c_1 x_1 + c_2 x_2 \end{vmatrix}$$

§ 182. Sind $J_1, J_2, J_3, \ldots$ Invarianten einer Form oder zum Teil oder sämtlich simultane Invarianten mehrerer Formen, so wird

bei beliebigen positiven ganzzahligen Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ das Produkt

$$\text{const. } J_1^{\alpha} J_2^{\beta} J_3^{\gamma} \ldots$$

gleichfalls eine Invariante; ihr Gewicht ist gleich der Summe der Gewichte sämtlicher Faktoren. Ferner ist die Summe solcher Potenzprodukte eine Invariante, falls nur die Gewichte ihrer einzelnen Summanden den gleichen Wert besitzen. Es fragt sich nun, ob aus den, wie nachgewiesen ist, unendlich vielen Invarianten eines Formensystems in jedem Falle eine endliche Anzahl von Invarianten ausgewählt werden kann, durch die eine jede Invariante des Systems als rationale ganze Funktion dargestellt werden kann? Diese Frage ist zu bejahen; man nennt eine Gesamtheit von Invarianten, durch die jede rationale ganze Invariante des Systems rational und ganz ausgedrückt werden kann, ein vollständiges System der Invarianten des Formensystems.

Von Kovarianten gilt das gleiche. P. Gordan hat diesen Fundamentalsatz zum ersten Male bewiesen (Journ. f. Math. 69, S. 323, 1868).

Für die binäre quadratische Form

$$f = c_0 x^2 + 2c_1 xy + c_2 y^2$$

besteht das vollständige Kovariantensystem aus f allein; das der Invarianten besteht aus der Diskriminante

$$D(f) = c_0 c_2 - c_1^2.$$

Für die kubische Form

$$f = c_0 x^3 + 3c_1 x^2 y + 3c_2 xy^2 + c_3 y^3$$

treten zu der Kovariante f noch zwei andere Kovarianten, nämlich

$$\begin{aligned} H &= (c_0 c_2 - c_1^2) x^2 + (c_0 c_3 - c_1 c_2) xy + (c_1 c_3 - c_2^2) y^2, \\ Q &= (c_0^2 c_3 - 3c_0 c_1 c_2 + 2c_1^3) x^3 + 3(c_0 c_1 c_3 - 2c_0 c_2^2 + c_1^2 c_2) x^2 y \\ &\quad - 3(c_0 c_2 c_3 - 2c_1^2 c_3 + c_1 c_2^2) xy^2 - (c_0 c_3^2 - 3c_1 c_2 c_3 + 2c_2^3) y^3 \end{aligned}$$

und als Invariante noch die Diskriminante D von f

$$D = c_0^2 c_3^2 - 6c_0 c_1 c_2 c_3 + 4c_0 c_2^3 + 4c_1^3 c_3 - 3c_1^2 c_2^2.$$

Die vier Formen f, D, H, Q bilden dann ein vollständiges System der kubischen Form f.

Hierbei sind diese vier Formen durch die nach Cayley benannte identische Gleichung

$$Q^2 + 4H^3 + Df^2 = 0$$

miteinander verknüpft.

§ 183. Wir wenden jetzt die Theorie der Transformation auf die quadratischen Formen an. Unter einer quadratischen Form von n Variablen verstehen wir einen Ausdruck von der Gestalt

(11a) $$f = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

in dem die $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ Variable und die $a_{\lambda\mu}$ reelle Konstante bedeuten, die den Bedingungen $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ unterworfen sind. Kommt es uns darauf an, die Variablen kurz anzudeuten, so schreiben wir $f(x)$ statt f. Von großer Bedeutung für die Natur der quadratischen Form ist die Determinante

$$A = |a_{\lambda\mu}| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

sie heißt die Determinante der Form f; A ist eine symmetrische Determinante ((6), S. 11). Die Adjunkte von a_λ in A bezeichnen wir mit $A_{\lambda\mu}$; dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{\varkappa} a_{\varkappa\lambda} A_{\varkappa\mu} &= A \quad (\text{wenn } \lambda = \mu) \\ &= 0 \quad (\text{wenn } \lambda \neq \mu) \end{aligned} \qquad (\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

§ 184. Wir führen nun eine lineare Transformation der Form $f(x)$ durch, indem wir

(11b) $$x_\mu = \sum_{\lambda} c_{\lambda\mu} y_\lambda \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

setzen, machen aber dabei die Voraussetzung, daß die Determinante

$$|c_{\lambda\mu}| = C \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

von Null verschieden sei. Dann kann man nämlich die Substitution (11) umkehren und die y durch die x ausdrücken. Ist $C_{\lambda\mu}$ die Adjunkte von $c_{\lambda\mu}$ in C, so wird

(11c) $$y_\lambda = \sum_{\mu} \frac{C_{\mu\lambda}}{C} x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Tragen wir (11) in f ein, dann entsteht die aus $g(y)$ transformierte quadratische Form

(12) $$g(y) = \sum_{\lambda,\mu} d_{\lambda\mu} y_\lambda y_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

in der

(12a) $$d_{\lambda\mu} = \sum_{\varkappa,\nu} c_{\lambda\varkappa} c_{\mu\nu} a_{\varkappa\nu} \qquad (\lambda, \mu, \varkappa, \nu = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

zu setzen ist.

Die Determinante der Form $g(y)$ ist dabei

$$D = |d_{\lambda\mu}| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Wir behaupten nun, daß die beiden Determinanten C und D von gleichem Range sind.

Man erkennt zunächst sofort die Richtigkeit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11} \ldots c_{n1} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ c_{1n} \ldots c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ c_{n1} \ldots c_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} d_{11} \ldots d_{1n} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ d_{n1} \ldots d_{nn} \end{matrix}$$

oder kürzer in symbolischer Form geschrieben

$$C \cdot A \cdot C = D,$$

aus der ersichtlich wird, daß, wenn eine der beiden Determinanten A und D verschwindet, auch die andere verschwinden muß, da $C \neq 0$ ist.

Weiter knüpfen wir an die Gleichung an

$$\begin{vmatrix} c_{11} \ldots c_{n1} & 0 \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \\ c_{1n} \ldots c_{nn} & 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} & u_1 \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} & u_n \\ v_1 \ldots v_n & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} & 0 \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \\ c_{n1} \ldots c_{nn} & 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} & \sum a_{\lambda 1} u_\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} & \sum a_{\lambda n} u_\lambda \\ \sum a_{1\lambda} v_\lambda & \ldots & \sum a_{n\lambda} v_\lambda & 0 \end{vmatrix} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

in der die $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ unbestimmte Größen bedeuten. Wir vergleichen nun die Koeffizienten von $u_\alpha v_\beta$ auf beiden Seiten. Links tritt, abgesehen vom Vorzeichen, das Produkt

$$C \cdot A_{\alpha\beta} \cdot C = C^2 \cdot A_{\alpha\beta}$$

auf; rechts ein Aggregat aus $(n-1)$-gliedrigen Determinanten der Elemente $d_{\lambda\mu}$; und daraus folgt, daß, wenn alle solche Determinanten verschwinden, das gleiche mit allen $A_{\alpha\beta}$ eintritt. Es gilt aber auch das Umgekehrte, da man die Rollen von A und von D vertauschen kann; dabei ist $g(y)$ an die Stelle von $f(x)$ zu setzen.

In gleicher Weise läßt sich das Produkt

$$\begin{vmatrix} c_{11} \ldots c_{n1} & 0 & 0 \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} \ldots c_{nn} & 0 & 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 & 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} & u_1 & u_1' \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} & u_n & u_n' \\ v_1 \ldots v_n & 0 & 0 \\ v_1' \ldots v_n' & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} & 0 & 0 \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} \ldots c_{nn} & 0 & 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 & 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

für die $(n-2)$-reihigen Minoren von A und von D auswerten; und

geht man in gleicher Weise fort, so kommt man zu dem Satze: Verschwinden sämtliche $\varkappa$-reihigen Minoren von A, so auch sämtliche von D und umgekehrt; oder mit anderen Worten, wie behauptet war: A und D haben gleichen Rang. Bezeichnet man als Rang einer quadratischen Form den Rang ihrer Determinante, so ist damit bewiesen, daß der Rang einer quadratischen Form invariant ist gegenüber allen linearen homogenen Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante.

§ 185. Es ist auf unendlich viele Arten möglich, die Substitution (11b) so zu wählen, daß die transformierte Form (12)

$$g(y) = d_{11}y_1^2 + d_{22}y_2^2 + d_{33}y_3^2 + \cdots + d_{\mu\mu}y_\mu^2$$

ein Aggregat von Quadraten wird.

Ist nämlich zunächst $a_{11} \neq 0$, dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \frac{2a_{13}}{a_{11}}x_1x_3 + \cdots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) \\ &\quad + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 \\ &\quad + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2 + \cdots + \left(a_{nn} - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}\right)x_n^2. \end{aligned}$$

Löst man also von $f(x)$ das erste Glied der rechten Seite ab, so bleibt zur Reduktion auf ein Aggregat von Quadraten nur noch eine quadratische Form von höchstens $(n-1)$ Variablen zurück.

Ist dagegen $a_{11} = 0$, aber ein Glied der Hauptdiagonale von A, etwa a_{nn} von Null verschieden, dann führen wir zunächst die Substitution

$$x_1 = y_\varkappa, \quad x_\varkappa = y_1, \quad x_\alpha = y_\alpha \text{ (wenn } \alpha \neq 1)$$

aus, durch die $f(x)$ in

$$g(y) = a_{\varkappa\varkappa}y_1^2 + 2a_{2\varkappa}y_1y_2 + \cdots$$

übergeht, und dann sind wir imstande, die Reduktion wie im ersten Falle durch Abtrennung eines Quadrates auf die einer Form von weniger als n Variablen zurückzuführen.

Sind endlich alle Elemente der Hauptdiagonale von A, d. h. alle $a_{\varkappa\varkappa}$ für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, n$ gleich Null, dann gehen wir so vor: Es sei $2a_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu$ eins der nicht verschwindenden Glieder von f; solche sind natürlich stets vorhanden. Dann führen wir die Substitution

$$x_\lambda = y_\lambda + y_\mu, \quad x_\mu = y_\lambda + y_\mu, \quad x_\alpha = y_\alpha \quad \text{(wenn } \alpha \neq \lambda)$$

aus, durch die $f(x)$ in

$$g(y) = \cdots + 2a_{\lambda\mu}y_\lambda^2 - 2a_{\lambda\mu}y_\mu^2 + \cdots$$

übergeht, so daß man auf einen der beiden schon behandelten Fälle zurückgelangt.

Das Resultat dieser Reduktionsmethode läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Man kann jede quadratische Form f der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als ein Aggregat von Quadraten darstellen in der Form

$$g(y) = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2 + \cdots + b_my_m^2, \tag{13}$$

wobei die y homogene lineare Funktionen der x bedeuten, die so beschaffen sind, daß mindestens eins der in y_α auftretenden x in $y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \ldots, y_m$ nicht mehr auftritt. Aus dieser letzten Eigenschaft folgt, daß zwischen den y keine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen kann.

§ 186. Die Elemente der Hauptdiagonale von $g(y)$ in (13) seien der Reihe nach

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0;$$

alle b haben zufolge ihrer Bildung reelle, von Null verschiedene Werte. Demnach besitzt $g(y)$ und daher auch $f(x)$ den Rang m, wenn der Rang einer quadratischen Form f gleich dem der Determinante $|a_{\varkappa\lambda}|$ ist.

Diese Betrachtung läßt sich verallgemeinern. Gesetzt, $f(x)$ würde durch eine lineare homogene Substitution mit nicht verschwindender Determinante E

$$x_\lambda = \sum_\mu e_{\lambda\mu}z_\mu,$$

wobei

$$E = |e_{\lambda\mu}| \neq 0, \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

in ein Aggregat von Quadraten umgewandelt

$$h(z) = b_1'z_1^2 + b_2'z_2^2 + b_3'z_3^2 + \cdots b_{m'}'z_{m'}^2,$$

dann geht man von $h(z)$ vermittels

$$z_\mu = \sum_\lambda \frac{E_{\lambda\mu}}{E}x_\lambda \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

zuerst zu $f(x)$ und von da aus zu

$$g(y) = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2 + \cdots + b_my_m^2$$

über. $g(y)$ ist daher auch eine Transformierte von $h(z)$, beide Formen haben gleichen Rang, und m' ist gleich m. Wandelt sich eine quadratische Form durch eine homogene lineare Substitu-

tion von nicht verschwindender Determinante in ein Aggregat von Quadraten um, dann ist die Anzahl dieser Quadrate gleich dem Range der Form.

Wir haben schon darauf aufmerksam gemacht, daß die m Funktionen y, die wir durch unsere Reduktionsmethode erlangt haben, voneinander unabhängig seien, d. h. daß keine lineare Relation

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \cdots + \alpha_m y_m = 0$$

mit konstanten nicht verschwindenden Koeffizienten α zwischen ihnen besteht. Das gleiche gilt von den m Formen $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$. Um dies zu beweisen, nehmen wir für die Substitution, durch welche die z in die y transformiert werden, und deren Existenz nachgewiesen worden ist, die Gestalt

$$z_\lambda = \sum_\mu p_{\lambda\mu} y_\mu, \quad \text{bei} \quad |p_{\lambda\mu}| = P \neq 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

an. Bestände nun eine lineare Relation mit konstanten nicht verschwindenden Koeffizienten β

$$\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \cdots + \beta_m z_m = 0,$$

so auch

$$\sum_\varkappa \beta_\varkappa p_{\varkappa 1} y_1 + \sum_\varkappa \beta_\varkappa p_{\varkappa 2} y_2 + \cdots + \sum_\varkappa \beta_\varkappa p_{\varkappa m} y_m = 0.$$

Da aber die y voneinander unabhängig sind, so verschwinden die einzelnen Koeffizienten, d. h. es wird

$$p_{11}\,\beta_1 + p_{21}\,\beta_2 + \cdots + p_{m1}\,\beta_m = 0,$$

$$p_{1m}\beta_1 + p_{2m}\beta_2 + \cdots + p_{mm}\beta_m = 0.$$

Diese m linearen homogenen Gleichungen in den β haben die nicht verschwindende Determinante P; also können sie nur befriedigt werden (§ 81, S. 97) durch

$$\beta_1 = 0, \; \beta_2 = 0, \; \ldots, \; \beta_m = 0.$$

Das widerspricht aber der Annahme. Also sind die z unabhängig voneinander.

§ 187. Solche Umwandlungen einer quadratischen Form in ein Aggregat von Quadraten können auf unendlich viele Arten gemacht werden. Greift man z. B. auch nur die Summe zweier Quadrate

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2$$

heraus und benutzt die Substitution

$$y_1 = m\eta_1 + n\eta_2, \quad y_2 = \mu\eta_1 + \nu\eta_2 \qquad (m\nu - n\mu \neq 0),$$

dann entsteht unter der einen Bedingung, die auf unendlich viele Arten erfüllbar ist,

(14) $$b_1 mn + b_2 \mu\nu = 0,$$

aus der Form

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2$$

wieder eine Summe von zwei Quadraten

$$(b_1 m^2 + b_2 \mu^2)\eta_1^2 + (b_1 n^2 + b_2 \nu^2)\eta_2^2.$$

Hierbei tritt nun ein bemerkenswerter Umstand zutage. Aus der Identität

$$(b_1 m^2 + b_2 \mu^2)(b_1 n^2 + b_2 \nu^2) = (b_1 mn + b_2 \mu\nu)^2 + b_1 b_2 (m\nu - n\mu)^2$$

ergibt sich wegen des Verschwindens der ersten Klammer auf der rechten Seite die Gleichung

$$\operatorname{sgn}(b_1 m^2 + b_2 \mu^2)(b_1 n^2 + b_2 \nu^2) = \operatorname{sgn}(b_1 b_2);$$

d. h. haben die Koeffizienten b_1 und b_2 der gegebenen quadratischen Form verschiedene Vorzeichen, dann findet das gleiche mit den Koeffizienten $b_1 m^2 + b_2 \mu^2$ und $b_1 n^2 + b_2 \nu^2$ statt. Ferner erkennt man unmittelbar, daß für zwei positive (oder negative) b_1 und b_2 auch $b_1 m^2 + b_2 \mu^2$ und $b_1 n^2 + b_2 \nu^2$ beide positiv (oder beide negativ) werden. Folglich liefert die neue Darstellung der quadratischen Form ebensoviel Glieder mit positivem und mit negativem Vorzeichen wie die alte.

Dieser Satz läßt sich auf die Darstellungen einer beliebigen quadratischen Form als Aggregat von Quadraten verallgemeinern. Sylvester hat diese Verallgemeinerung unter dem Namen Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im Phil. Mag. 1852, 1853 veröffentlicht; Jacobi hatte sie bereits 1847 gefunden, wie sich aus seinen nachgelassenen Papieren ergibt (siehe Werke III, S. 591), sie jedoch nicht mitgeteilt. Wir folgen bei der Behandlung des allgemeinen Satzes dem Gedankengange Jacobis.

Die Koeffizienten der einzelnen Quadrate der Aggregate können wir gleich ± 1 machen, indem wir die Quadratwurzeln aus den absoluten, zunächst vorhandenen Koeffizienten in die Klammern ziehen. Somit dürfen wir von vornherein

$$g = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_s^2 - Y_{s+1}^2 - \cdots - Y_{s+t}^2 \quad (s + t = m),$$
$$h = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_p^2 - Z_{p+1}^2 - \cdots - Z_{p+r}^2 \quad (p + r = m)$$

setzen. Dabei bilden die Y unter sich, sowie die Z unter sich unabhängige homogene Systeme.

Aus der doppelten Darstellung von $f = g = h$ folgt

$$(15)\qquad \begin{aligned} &Y_1^2 + \cdots + Y_s^2 + Z_{p+1}^2 + \cdots + Z_{p+r}^2 \\ &= Z_1^2 + \cdots + Z_p^2 + Y_{s+1}^2 + \cdots + Y_{s+t}^2, \end{aligned}$$

und aus der Annahme, daß

$$(16)\qquad Z_1 = 0, \ldots, Z_p = 0; \; Y_{s+1} = 0, \ldots, Y_{s+t} = 0$$

wird, welche für alle reellen Wertsysteme der x die Gleichungen

$$(17)\qquad Y_1 = 0, \ldots, Y_s = 0; \; Z_{p+1} = 0, \ldots, Z_{p+r} = 0$$

befriedigen, und umgekehrt folgt (16) aus (17).

Demnach ist das unabhängige Gleichungssystem

$$Z_1 = 0, \ldots, Z_p = 0; \; Z_{p+1} = 0, \ldots, Z_{p+r} = 0$$

eine notwendige Folge des Gleichungssystems (17). Nach § 82, S. 98 ist nun

$$p + r \leqq s + r, \quad \text{d. h.} \quad p \leqq s.$$

Ebenso ist das unabhängige Gleichungssystem

$$Y_1 = 0, \ldots, Y_s = 0; \; Y_{s+1}, \ldots, Y_{s+t} = 0$$

eine notwendige Folge des Gleichungssystems (16) und deshalb

$$s + t \leqq p + t, \quad \text{d. h.} \quad s \leqq p.$$

Die beiden Resultate $p \leqq s$ und $s \leqq p$ liefern $p = s$, und damit ist das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen bewiesen.

Sechzehntes Kapitel.

Der Sturmsche Satz.

§ 188. Wir wollen uns in diesem Kapitel mit einem Theoreme beschäftigen, durch das es gelingt, jede reelle Wurzel einer Gleichung

$$(1)\qquad f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

mit reellen Koeffizienten beliebig genau zu bestimmen. Wir sind dieser Frage bereits früher (§ 70, S. 82) begegnet und haben sie, wie es schien, durch die Newtonsche Näherungsformel in völlig ausreichender Weise beantwortet. Allein dabei ist zu bemerken, daß man dort von einem, der gesuchten Wurzel „hinreichend nahen“ Werte ausgeht. In dieser Annahme liegt aber noch eine Schwierigkeit, die erst be-

hoben werden müßte, ehe diese Methode Anspruch auf Vollständigkeit machen könnte. Wir wollen aber hier nicht weiter auf diese Newtonsche Methode eingehen, sondern eine andere auseinandersetzen, die in der einfachsten Weise das Problem erledigt. Sie beruht auf der Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln von (1), die innerhalb eines beliebig gegebenen Intervalles $x=a$ bis $x=b$ liegen ($b>a$). Ohne eine wesentliche Einschränkung kann dabei angenommen werden, daß (1) keine vielfachen Wurzeln besitzt; denn sollte dies nicht der Fall sein, so könnte man durch rationale Operationen eine Gleichung $\varphi(x)=0$ herstellen, die alle und nur die Wurzeln von (1) und jede von ihnen als einfache Wurzel besitzt. Wir dürfen und wollen für dieses Kapitel annehmen, daß jene Voraussetzung über die Multiplizität der Wurzeln von (1) erfüllt sei.

§ 189. Es ist begreiflich, daß dieses fundamentale Problem schon früh die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich zog. So haben sich Budan, Descartes, Fourier, Newton mit ihm beschäftigt, aber ihre Resultate waren nicht ausreichend. Im allgemeinen bestimmten sie nur eine untere Grenze für die gesuchte Anzahl der Wurzeln. Erst Ch. Sturm gelang es, eine vollständige und einfache Lösung zu geben. Wir wollen uns im folgenden nur mit dieser Sturmschen Lösung beschäftigen und die vorhergehenden Lösungsversuche beiseite lassen.

Sind zwei reelle ganze Funktionen einer Variablen vorgelegt,

$$f(x) \quad \text{und} \quad g(x),$$

so betrachten wir ihre Vorzeichen für einen numerisch gegebenen Wert x_0 von x, nämlich

$$\operatorname{sgn} f(x_0) \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} g(x_0). \tag{2}$$

Stimmen diese beiden Zeichen miteinander überein, oder mit anderen Worten: ist

$$f(x_0)\cdot g(x_0)>0,$$

so sprechen wir von einer Zeichenfolge bei $f(x_0)$, $g(x_0)$. Stimmen beide Signa aus (2) nicht überein, oder mit anderen Worten: ist

$$f(x_0)\cdot g(x_0)<0,$$

so sprechen wir von einem Zeichenwechsel bei $f(x_0)$, $g(x_0)$.

Der Fall, daß das Produkt $f(x_0)\cdot g(x_0)$ gleich Null wird, sei ausgeschaltet. — Von diesen Einführungen machen wir im folgenden Gebrauch.

§ 190. Die Reihe der rationalen ganzen Funktionen der Variablen x

$$f,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots,\ f_r \tag{3}$$

möge folgende drei Eigenschaften besitzen:

I. Das letzte Glied f_r ist eine von Null verschiedene Konstante.

II. Für ein und dasselbe Argument $x = \xi$ verschwinden niemals zwei aufeinander folgende Glieder der Reihe (3).

III. Verschwindet für ein bestimmtes Argument $x = \xi$ ein Glied $f_\varkappa(\xi)$ der Reihe (2), dann haben die beiden rechts und links benachbarten Glieder $f_{\varkappa-1}(x)$ und $f_{\varkappa+1}(x)$ für $x = \xi$ entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. es ist

$$\operatorname{sgn} f_{\varkappa-1}(\xi) \cdot \operatorname{sgn} f_{\varkappa+1}(\xi) = -1.$$

Wir wollen nun die Zeichenänderungen untersuchen, die in (3) vor sich gehen, wenn x von einem Argumente a monoton wachsend nach b ($> a$) geführt wird.

Eine Änderung in der zu (3) gehörigen Zeichenreihe kann nur dadurch vor sich gehen, daß entweder f_r oder f oder ein mittleres f_λ durch Null geht.

Das erste ist wegen der Bedingung I nicht möglich.

Wir betrachten ferner den Fall, daß $f_\lambda(\xi)$ bei $0 < \lambda < r$ gleich Null wird. Dann müssen wegen II die beiden Werte

$$f_{\lambda-1}(\xi) \quad \text{sowie} \quad f_{\lambda+1}(\xi)$$

von Null verschieden sein; somit kann man einen Bereich $(\xi - \delta, \ldots, \xi + \delta)$ mit positivem δ um ξ abgrenzen, der so klein ist, daß in ihm $f_{\lambda-1}(x)$ und $f_{\lambda+1}(x)$ für jedes x bei $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ von Null verschieden bleiben. In diesem Bereiche haben nach III die beiden Funktionen $f_{\lambda-1}(x)$ und $f_{\lambda+1}(x)$ verschiedene Signa. Also ist für diesen Bereich

$$\operatorname{sgn} f_{\lambda-1}(\xi - \delta) \cdot \operatorname{sgn} f_{\lambda+1}(\xi - \delta) = -1$$

und ebenso

$$\operatorname{sgn} f_{\lambda-1}(\xi + \delta) \cdot \operatorname{sgn} f_{\lambda+1}(\xi + \delta) = -1.$$

Daraus folgt, daß, wie auch immer der Wert von $\operatorname{sgn} f_\lambda(x)$ für ein x des Bereiches $(\xi - \delta, \ldots, \xi + \delta)$ sei, jede der beiden Zeichenreihen

$$\operatorname{sgn} f_{\lambda-1}(\xi - \delta),\ \operatorname{sgn} f_\lambda(\xi - \delta),\ \operatorname{sgn} f_{\lambda+1}(\xi - \delta),$$
$$\operatorname{sgn} f_{\lambda-1}(\xi + \delta),\ \operatorname{sgn} f_\lambda(\xi + \delta),\ \operatorname{sgn} f_{\lambda+1}(\xi + \delta)$$

je einen Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge liefert. Es tritt daher in

$$\operatorname{sgn} f_{\lambda-1}(x),\ \operatorname{sgn} f_\lambda(x),\ \operatorname{sgn} f_{\lambda+1}(x)$$

beim Passieren von $x = \xi$ keine Änderung in der Anzahl der Folgen und der Wechsel bei (3) ein.

Es bleibt also für das Zu- oder das Abnehmen dieser Anzahl nur der eine Fall übrig, daß $f(x)$ durch Null geht. Es sei etwa $f(\xi) = 0$,

und innerhalb $(\xi - \delta, \ldots, \xi + \delta)$ möge $f_1(x)$ sein Vorzeichen nicht ändern. Die Annahme, daß $f(x)$ bei $x = \xi$ durch Null hindurchgehe, kann stets dadurch verwirklicht werden, daß man $f(x)$ durch die Funktion $\varphi(x)$ ersetzt, wobei $\varphi = 0$ alle Wurzeln von $f = 0$, jede in der Multiplizität „Eins" besitzt. Hiernach ergibt sich für die Signa das Schema der vier Möglichkeiten

		sgn $f(x)$	sgn $f_1(x)$	sgn $f(x)$	sgn $f_1(x)$
	$x = \xi - \delta$	+	+	+	−
IV.	$x = \xi + \delta$	−	+	−	−
	$x = \xi - \delta$	−	+	−	−
	$x = \xi + \delta$	+	+	+	−

Aus diesem Schema erhellt, daß in den beiden Fällen: links oben und rechts unten beim Übergange der Variablen x von $\xi - \delta$ nach $\xi + \delta$ ein Zeichenwechsel gewonnen, während in den beiden Fällen rechts oben und links unten beim Übergange ein Zeichenwechsel verloren wird.

§ 191. Wir wollen nun eine Spezialisierung der Reihe (3) vornehmen. Zunächst sei $f(x)$ eine ganze Funktion von x ohne mehrfachen Teiler. Zweitens sei $f_1(x)$ die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$. Drittens seien $f_2(x), f_3(x), \ldots, f_\alpha(x), \ldots, f_r(x)$ durch die Gleichungen

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
f_2(x) &= q_1(x) \cdot f_1(x) - f(x), \qquad (f_1(x) = f'(x))\\
f_3(x) &= q_2(x) \cdot f_2(x) - f_1(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_\alpha(x) &= q_{\alpha-1}(x) \cdot f_{\alpha-1}(x) - f_{\alpha-2}(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_r(x) &= q_{r-1}(x) \cdot f_{r-1}(x)
\end{aligned}
$$

definiert. Dieser Algorithmus ist ganz ähnlich dem Euklidschen zur Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Funktionen gebildet, wie die Vergleichung des Schemas (4) mit jenem S. 51, (7) ersichtlich macht.

Es ist nun leicht zu erkennen, daß die Forderungen I, II, III aus § 190 erfüllt sind: I, weil f_r als größter gemeinsamer Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$ eine von Null verschiedene Konstante ist; II und III unmittelbar nach der Definition.

Das Schema IV vereinfacht sich, wenn man bedenkt, daß bei positivem $f'(x)$ die Funktion $f(x)$ wächst, bei negativem $f'(x)$ dagegen abnimmt. Dadurch kommen nämlich die Möglichkeiten links oben und rechts unten in IV in Fortfall. Die beiden zurückbleibenden Mög-

lichkeiten ergeben den Verlust eines Zeichenwechsels in der Reihe der Funktionalwerte.

§ 192. Nach diesen Vorbereitungen können wir an die Lösung des Problems gehen, das im Anfange dieses Kapitels aufgestellt worden ist, und das die genaue Bestimmung der Anzahl der Wurzeln von $f(x) = 0$ fordert, die zwischen den beiden Grenzen x_1 und x_2 $(> x_1)$ liegen.

Nun sei vorgelegt die ganze Funktion $f(x)$, die keinen mehrfachen Teiler besitzen soll, so daß also $f(x)$ und $f'(x)$ teilerfremd zueinander sind, wobei — wie gewöhnlich — $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ bedeutet. Mit $f(x)$ und $f'(x)$ wird nach § 191, (4) die Reihe

$$(5) \qquad f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_r(x)$$

und die zugehörige Zeichenreihe

$$(6) \qquad \operatorname{sgn} f(x),\ \operatorname{sgn} f'(x),\ \operatorname{sgn} f_2(x),\ \operatorname{sgn} f_3(x),\ \ldots,\ \operatorname{sgn} f_r(x)$$

gebildet. Wir betrachten jetzt die Anzahlen

$$\sum W(x_1) = k_1, \quad \sum W(x_2) = k_2; \quad \sum W(x) = k$$

der Zeichenwechsel in (6). Wir lassen x von x_1 bis x_2 „monoton“ zunehmend sich ändern. Dabei kann auch k einer Änderung unterliegen; diese kann — wie im vorigen Paragraphen gezeigt worden ist — nur in einer Verminderung des k um eine Einheit bei jedem Überschreiten einer Wurzel von $f = 0$ seitens des x bestehen. Daraus folgt: Die genaue Anzahl der zwischen x_1 und x_2 liegenden Wurzeln von $f(x) = 0$ ist gleich der Differenz

$$\sum W(x_1) - \sum W(x_2) = k_1 - k_2.$$

Die Reihe (6) heißt die Sturmsche zu $f(x)$ gehörende Reihe.

§ 193. Wir wollen den Sturmschen Satz auf einige Beispiele anwenden. Es sei

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4,$$

dann wird

$$16 \cdot f = (4x+1) \cdot f' - 3 \cdot f_2, \qquad f' = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1;$$
$$32 \cdot f' = (36x+19) \cdot f_2 - 160 \cdot f_3, \qquad f_2 = 9x^2 + 2x + 21;$$
$$64 \cdot f_2 = (72x-11) \cdot f_3 - 1377 \cdot f_4, \qquad f_3 = 8x + 3; \quad f_4 = -1;$$

und man erhält die Tabelle

sgn	f	f_1	f_2	f_3	f_4	
$x = -\infty$	+	−	+	−	−	$\sum W = 3$
$x = 0$	−	−	+	+	−	$\sum W = 2$
$x = +\infty$	+	+	+	+	−	$\sum W = 1$

Aus ihr ist zu ersehen, daß $f(x) = 0$ eine positive, eine negative und daher zwei komplexe Wurzeln besitzt.

Setzt man der Reihe nach $x = -3, -2, -1, 0, +1, +2$, so folgt die Tabelle

sgn	f	f_1	f_2	f_3	f_4	
$x = -3$	+	−	+	−	−	$\sum W = 3$
$x = -2$	−	−	+	−	−	$\sum W = 2$
$x = -1$	−	+	+	−	−	$\sum W = 2$
$x = \pm 0$	−	−	+	+	−	$\sum W = 2$
$x = +1$	−	0	+	+	−	$\sum W = 2$
$x = +2$	+	+	+	+	−	$\sum W = 1$,

die uns zeigt, daß $f(x) = 0$ zwei reelle Wurzeln hat, eine positive und eine negative, und daß die negative Wurzel zwischen -3 und -2, und die positive zwischen $+1$ und $+2$ liegt.

Als zweites Beispiel wählen wir die quadratische Gleichung

$$f(x) = x^2 + 2ax^1 + b = 0.$$

Dabei wird

$$\frac{1}{2} f'(x) = x + a, \quad f_2 = a^2 - b.$$

	f	f'	f_2	
$x = -\infty$		−	$\operatorname{sgn}(a^2-b)$	$\sum W = 1 + \frac{\operatorname{sgn}(a^2-b)+1}{2}$
$x = \pm 0$	$\operatorname{sgn} b$	$\operatorname{sgn} a$	$\operatorname{sgn}(a^2-b)$	
$x = +\infty$	+	−	$\operatorname{sgn}(a^2-b)$	$\sum W = \quad -\frac{\operatorname{sgn}(a^2-b)-1}{2}$

Die Anzahl der reellen Wurzeln ist mithin

$$\left(1 + \frac{\operatorname{sgn}(a^2-b)+1}{2}\right) - \left(-\frac{\operatorname{sgn}(a^2-b)-1}{2}\right) = 1 + \operatorname{sgn}(a^2-b),$$

d. h. gleich zwei, wenn $(a^2-b) > 0$, und gleich Null, wenn $(a^2-b) < 0$ ist. Man erkennt ferner, daß im ersten dieser beiden Fälle bei

$a > 0, \ b > 0$ zwei negative Wurzeln,

$a < 0, \ b > 0$ zwei positive Wurzeln,

$a < 0, \ b < 0$ \
$a < 0, \ b < 0$ } eine positive und eine negative Wurzel auftreten.

Alphabetisches Register.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)